數學傳播 34卷1期, pp. 29-34

三角形的四心之向量關係式

阮瑞泰

一、前言

在閱讀 換個觀點看三角形的四心 (數學傳播 30 卷 2 期) 時, 內容提及

已知銳角 $\triangle ABC$ ($\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$), G 爲重心、I 爲內心、H 爲垂心、O 爲外心、此四心與三頂點的連線所形成的三個的三角形, 其面積比分別爲

$$\begin{aligned}
&a\triangle ABG : a\triangle BCG : a\triangle CAG = 1 : 1 : 1\\
&a\triangle ABI : a\triangle BCI : a\triangle CAI = c : a : b\\
&a\triangle ABH : a\triangle BCH : a\triangle CAH = c^4-(a^2-b^2)^2 : a^4-(b^2-c^2)^2 : b^4-(c^2-a^2)^2\\
&a\triangle ABO : a\triangle BCO : a\triangle CAO = c^2(a^2+b^2-c^2) : a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2)
\end{aligned}$$

使我聯想起, 曾推論所得的三角形之四心向量關係式, 發現其係數比恰爲四心與三頂點連線的面積比。所以我透過三角形之四心向量關係式之推論, 來驗證四心與三頂點連線的面積比。文中用到一些現行高中教材中的公式及定理, 及解題技巧。如三角形的重心及內心的向量關係, 面積公式 (海龍公式) , 解方程組的克拉瑪公式, 三角形的垂心及外心的向量解題技巧, 頗適合高中的同學們閱讀參考。

二、本文

(一) **公式** 1: 三角形四心的向量關係式

已知 $\triangle ABC$ 的重心 G, 內心 I, 垂心 H 及外心 O, X 爲空間中任一點, 試以 $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{XC}$ 來表示 $\overrightarrow{XG}$, $\overrightarrow{XI}$, $\overrightarrow{XH}$, $\overrightarrow{XO}$

1. 重心: $\overrightarrow{XG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{XA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{XB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{XC}$。

2. 內心: $\overrightarrow{XI}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{XA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{XB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{XC}$.

3. 垂心: $\overrightarrow{XH}=\dfrac{a^4-(b^2-c^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XA}+\dfrac{b^4-(c^2-a^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XB}+\dfrac{c^4-(a^2-b^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XC}$。

4. 外心: $\overrightarrow{XO}=\dfrac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XA}+\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XB}+\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XC}$。

解法: 重心及內心的關係式於教材中均有說明, 不再贅述, 僅將關係式列舉如上:

3. 垂心: $\overrightarrow{XH}=\dfrac{a^4-(b^2-c^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XA}+\dfrac{b^4-(c^2-a^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XB}+\dfrac{c^4-(a^2-b^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XC}$

解法:

設 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=x\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+y\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=x\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\end{cases}\quad(\text{垂心性質: }\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}=c^2x+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}y\\ \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}x+b^2y\end{cases}$$

(1) 若 $b^2+c^2-a^2=0$, 則 $x=0$, $y=0$,

$\Rightarrow\overrightarrow{AH}=0\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$, $H=A$ 。(直角三角形的垂心在直角頂點)

(2) 若 $b^2+c^2-a^2\neq 0$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=\dfrac{2c^2}{b^2+c^2-a^2}x+y\\ 1=x+\dfrac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}y\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 利用克拉瑪公式

$$\begin{aligned}\triangle&=\begin{vmatrix}\dfrac{2c^2}{b^2+c^2-a^2}&1\\ 1&\dfrac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}\end{vmatrix}\\ &=\left(\dfrac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^2-1\\ &=\dfrac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{(b^2+c^2-a^2)^2}\\ &=\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{(b^2+c^2-a^2)^2},\end{aligned}$$

$$(\text{令 } s=\frac{a+b+c}{2}, \text{ 則 } \frac{-a+b+c}{2}=s-a,\ \frac{a-b+c}{2}=s-b,\ \frac{a+b-c}{2}=s-c)$$

$$=\frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{(b^2+c^2-a^2)^2},$$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{2b^2}{b^2+c^2-a^2} \end{vmatrix}=\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2},$$

$$\triangle_y=\begin{vmatrix} \dfrac{2c^2}{b^2+c^2-a^2} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2},$$

$\because \triangle \neq 0,\quad \therefore (x,y)$ 有唯一解

$$\Rightarrow x=\frac{\triangle_x}{\triangle}=\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{b^4-(c^2-a^2)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$y=\frac{\triangle_y}{\triangle}=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{c^4-(a^2-b^2)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\frac{b^4-(c^2-a^2)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{AB}+\frac{c^4-(a^2-b^2)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{AC}$$

令 X 為空間中的任意一點, 且 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,

$\therefore\quad \overrightarrow{XH}-\overrightarrow{XA}=x(\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA})+y(\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA})$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{XH}&=(1-x-y)\overrightarrow{XA}+x\overrightarrow{XB}+y\overrightarrow{XC}\\ &=\frac{a^4-(b^2-c^2)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{XA}+\frac{b^4-(c^2-a^2)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{XB}\\ &\quad+\frac{c^4-(a^2-b^2)^2}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{XC}\end{aligned}$$

且 $a\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

則 $\overrightarrow{XH}=\dfrac{a^4-(b^2-c^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XA}+\dfrac{b^4-(c^2-a^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XB}+\dfrac{c^4-(a^2-b^2)^2}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XC}$。

4. 外心: $\overrightarrow{XO}=\dfrac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XA}+\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XB}+\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XC}$。

解法: 設 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=x\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+y\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=x\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\end{cases},\ (\text{外心性質: }\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{c^2}{2}=c^2x+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}y\\ \dfrac{b^2}{2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}x+b^2y\end{cases}$$

(1) 若 $b^2+c^2-a^2=0$, 則 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, (仿垂心的討論)

$\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, O 爲 $\overline{BC}$ 的中點。(直角三角形的外心在斜邊中點)

(2) 若 $b^2+c^2-a^2\neq 0$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=2x+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{c^2}y\\ 1=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{b^2}x+2y\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 利用克拉瑪公式求解 x, y

$$\begin{aligned}\triangle&=\begin{vmatrix}2 & \dfrac{b^2+c^2-a^2}{c^2}\\ \dfrac{b^2+c^2-a^2}{b^2} & 2\end{vmatrix}\\ &=4-\Big(\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\Big)^2\\ &=\frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{b^2c^2}\\ &=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{b^2c^2},\end{aligned}$$

(令 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, 則 $\dfrac{-a+b+c}{2}=s-a$, $\dfrac{a-b+c}{2}=s-b$, $\dfrac{a+b-c}{2}=s-c$)

$$=\frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2},$$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix}1 & \dfrac{b^2+c^2-a^2}{c^2}\\ 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2},\qquad \triangle_y=\begin{vmatrix}2 & 1\\ \dfrac{b^2+c^2-a^2}{b^2} & 1\end{vmatrix}=\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2},$$

$\because \triangle \neq 0,\quad \therefore (x,y)$ 有唯一解

$$\Rightarrow x=\frac{\triangle_x}{\triangle}=\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)},\quad y=\frac{\triangle_y}{\triangle}=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}=\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{AB}+\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{AC},$$

令 X 爲空間中的任意一點, 且 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,

$$\therefore\quad \overrightarrow{XO}-\overrightarrow{XA}=x(\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA})+y(\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{XO}=(1-x-y)\overrightarrow{XA}+x\overrightarrow{XB}+y\overrightarrow{XC}$$

$$=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{XA}+\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{XB}$$

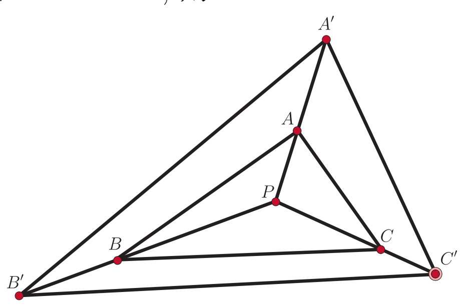
$$+\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16s(s-a)(s-b)(s-c)}\overrightarrow{XC}$$

且 $a\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

則 $$\overrightarrow{XO}=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XA}+\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XB}+\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16(a\triangle ABC)^2}\overrightarrow{XC}$$

(二) **公式** 2:

已知 A, B, C, P 四點共平面, $l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$, 則 $a\triangle PAB : a\triangle PBC : a\triangle PCA=|n|:|l|:|m|$



證明: (1) P 在 $\triangle ABC$ 的內部, 則 $l,m,n>0$, ($l,m,n<0$ 亦同), 如右圖

取 $\overrightarrow{PA'}=l\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB'}=m\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC'}=n\overrightarrow{PC}$

$\because l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$,

$\therefore \overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\overrightarrow{0}$, P 爲 $\triangle A'B'C'$ 的重心。

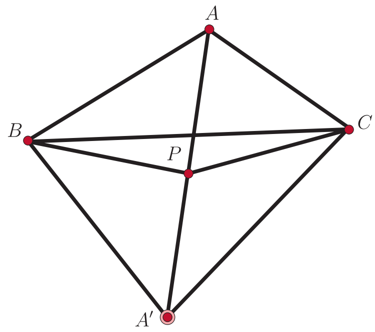
$\Rightarrow a\triangle PA'B'=a\triangle PB'C'=a\triangle PC'A'=\dfrac{1}{3}a\triangle A'B'C'$。

又 $$\frac{a\triangle PAB}{a\triangle PA'B'}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\sin\theta}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA'}|\cdot|\overrightarrow{PB'}|\cdot\sin\theta}=\frac{1}{l\cdot m},\ (\angle APB=\theta)$$

$\Rightarrow a\triangle PAB=\dfrac{1}{l\cdot m}a\triangle PA'B'$,

同理可得 $a\triangle PBC=\dfrac{1}{m\cdot n}a\triangle PB'C'$, $a\triangle PCA=\dfrac{1}{n\cdot l}a\triangle PC'A'$。

$\Rightarrow a\triangle PAB : a\triangle PBC : a\triangle PCA = n : l : m$



(2) P 在 $\triangle ABC$ 的外部, 則 $l<0$, $m,n>0$

($l>0$, $m,n<0$ 亦同), 如右圖

取 $\overrightarrow{PA'} = -\overrightarrow{PA}$, $\Rightarrow$ P 在 $\triangle A'BC$ 的內部,

且 $\because$ $(-l)\overrightarrow{PA'} + m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$,

$\therefore a\triangle PA'B : a\triangle PBC : a\triangle PCA' = n : (-l) : m$。

$a\triangle PAB = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\sin\theta = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PA'}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\sin(\pi-\theta) = a\triangle PA'B$,

同理可得 $a\triangle PAC = a\triangle PA'C$。

由 (1)、(2) 得證公式 2。

(三) **公式** 3: 三角形四心與三頂點連線所成三角形之面積比

已知 $\triangle ABC$ 的重心 G, 內心 I, 垂心 H 及外心 O, 則

(1) $a\triangle ABG : a\triangle BCG : a\triangle CAG = 1:1:1$。

(2) $a\triangle ABI : a\triangle BCI : a\triangle CAI = c:a:b$。

(3) $a\triangle ABH : a\triangle BCH : a\triangle CAH = c^4-(a^2-b^2)^2 : a^4-(b^2-c^2)^2 : b^4-(c^2-a^2)^2$。

(4) $a\triangle ABO : a\triangle BCO : a\triangle CAO = c^2(a^2+b^2-c^2) : a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2)$。

證明:

取 $X=G,I,O,H$, 由公式 1 與公式 2 即可得證。

三、後語

謝謝學長伍榮輝老師的校稿與鼓勵。

—本文作者任教高雄市市立新莊高中—