數學傳播 34卷1期, pp. 14-28

機率應用不易

黃文璋

1. 前言

統計裡常在做預測。但如量子論泰斗, 曾獲 1922年諾貝爾物理獎, 丹麥的波耳 (Niels Bohr, 1885∼1962) 所說:

預測很難, 尤其關於未來。

世上多的是事後諸葛, 而對於隨機現象做預測時, 誤差常難以避免。只是誤差之意義, 並不易爲一般人所理解。統計學家對未來的預測, 因此備受挑戰。有人甚至因此不相信統計, 以爲統計不過是謊言。

其實不要說隨機或誤差, 甚至連最原始的機率之意義, 都非三言兩語可說清楚。即使對統計學研究所的學生, 就算學過各種對機率的解釋, 如以相同可能性、頻率、主觀, 及公理化 (機率空間) 等, 以及各種較深入的機率理論, 常常也會算錯一些, 表面上看起來很簡單的機率。這其中特別是條件機率 (conditional probability), 是一般人較不易掌握的。可以這麼說:

機率很難, 尤其條件機率。

機率值會變, 是機率的特性。假設生男生女之機率各爲$1/2$。有人按你家門鈴。此人是男是女? 如果沒有其他資訊, 你會想機率大約各$1/2$。但如果你知道按門鈴者, 是送披薩的, 那很可能會認爲, 至少有 0.9的機率是男生。因根據你的經驗, 送披薩的通常是男生。

這就是條件機率! 即在給定 “某事件發生” 之條件下 (有新的資訊), 原先那一事件發生的機率, 有時會隨之而變。條件機率會不會有不變的時候? 也是有的, 若兩事件獨立 (independent), 則給定其中之一發生, 對另一事件發生之機率, 便不會有影響。即此資訊對預測原事件發生之機率, 並沒有幫助。獨立性可說是機率論中一特別的概念。譬如說, 假設你的心情不受洋基隊輸贏之影響, 則若洋基隊今天贏球, 你投擲一銅板出現正面之機率, 是不會改變的。當然也不會影響你所修的那門機率論期中考及格的機率。但若銅板乃來自洋基隊, 他們若贏球, 給你 A 銅板; 若輸球, 給你 B 銅板, 則投擲銅板出現正面之機率, 將隨洋基隊輸贏而有所改變。

曾看過一篇名爲“機率與文字陷阱”的文章。該文先舉下述例子。

例1:

(i) 有一好友有二小孩, 已知老大是女孩。試問老二亦是女孩之機率爲何?

(ii) 有一好友有二小孩, 已知有一個女孩。試問另一小孩亦是女孩之機率爲何?

該文於算出 (i) 答案是 $1/2$, 及 (ii) 答案爲 $1/3$, 並做了一些說明後, 卻自己覺得有些問題。遂舉某高中的一道數學競試題目來討論。我們列爲底下例 2。

例2: 甲投擲兩硬幣, 並讓乙猜朝上的兩面是 “相同” 或 “相異”。乙正準備要猜, 丙從旁經過, 說 “有一個正面”。試問這時乙該猜相同或相異?

該文說出題高中所給之解爲: 應猜相異, 猜對機率爲 $2/3$ 。算法與例 1中的 (ii) 一樣。然後該文指出:

> 但再仔細想想, 今天如果丙看到的是反面, 那麼乙也要猜相異, 而且猜對的機率也是 $2/3$ 。所以乙只要知道丙有說話, 儘管不知道丙說什麼, 猜相異對的機率就是 $2/3$ 。那其實乙根本不需要丙幫忙, 只要他猜的時候, 假想有一個丙走過來跟他說話, 那猜相異對的機率就比較大 (因爲不管丙說什麼都是要猜相異)。於是得到結論: 投擲兩硬幣, 朝上兩面相異之機率爲 $2/3$, 因爲一定會有正面或反面。講到這裡, 很明顯有錯, 因爲相同及相異之機率, 從國中以來, 就教皆爲 $1/2$。

此質疑看起來還頗有道理的。你現在相信條件機率不容易了吧! 經過一番討論, 且對例 2 中的情況找人做了 200次實驗, 該文宣佈例1中的 (i) 與 (ii), 及例2, 其中的機率皆爲 $1/2$。該文接著又給一例。

例3: 所有有兩個小孩且有女孩的家庭中, 兩小孩皆爲女孩的機率爲何? 該文說解爲: $1/3$。

最後該文給出下述結論:

> 如果題目內有知道的 “知”, 或是有第三者當仲介給提示或條件, 條件機率做出來都會錯。反之, 如果題目有強調 “所有的” (如例3), 那麼每一個情況發生的機率都相同, 就可以放心的用條件機率。
>
> 搞了半天, 是題目敘述有語病。這是文字陷阱。這題一開始的問法, 應該是上題這種問法才對, 只是不小心敘述錯誤, 造成大問題。我想, 大家往後解題, 應該會多注意這種情況了。

在上面這段該文作者有意思的心得中, 我們猜想 “這題” 乃指例1之 (ii), 而 “上題” 指例3。該文作者寫作的動機, 是爲了釐清一些常會引起學生困擾的條件機率問題。可惜他的文章引發的問題, 恐多於解決的問題。我們稍後會回到他所提出的幾個例子。

諸位看, 有時給的條件是一段文字, 如何將這段文字的內涵正確解讀, 並不見得都很容易。若解讀錯誤, 得到的條件機率當然也就不對了。鑒於條件機率處處可見, 但其概念, 卻又不易爲一般人所了解。本文將對此略做討論。

2. 條件機率

曾看到下述一則新聞報導:

> 美國加州有一家庭, 爸爸媽媽和剛出生的小孩, 都在同月同日生。$\cdots$ 。這樣巧合的機率只有 0.00000751。$\cdots$。夫妻兩人當初就是因生日相同, 相信緣分天註定而結婚, 沒想到第一個小孩也在同一天出生。

上述機率是如何求出呢? 假設 1年有 365天, 則任意 3人生日相同之機率爲

$$\binom{365}{1}\frac{1}{365^3}=\frac{1}{365^2}=7.506\cdot 10^{-6}。$$

這當然與 "某家族中有 3人生日相同" 之機率不同, 也與 "某學校中有 3位學生生日相同" 的機率不同。但對這對自認緣分天註定的夫妻而言, 他們的第一個小孩生日與他們同一天之機率, 卻爲 1/365, 並不眞那麼小。他們夫妻生日相同, 是一既成的事實, 可視爲一給定的條件。在此條件下, 要求第 3人 (他們的第一個小孩) 生日與他們同一天的機率。這與任挑選的 3人, 生日同一天, 情況不同。

提醒初學者: 求機率時, 務必要弄清楚究竟在求什麼事件之機率。在給不同的條件下, 機率值可能會因此不同。

我們在樣本空間上定義機率。有時得到一些資訊, 則根據所獲得的資訊, 樣本空間可能有所改變, 因而機率空間也就隨之而變。得到的新機率, 就是所謂 條件機率。

在數學裡不會有這種情況。給定某數是 2, 它就一直是 2。不變是數學的特性。但在討論機率時, 某事件的機率, 是有可能因情況不同而變。這本來是不奇怪的, 但因大部分的人受數學的薰陶較久, 習慣數學中處理 "不變" 的問題, 所以在學習機率時, 看到機率值居然會改變, 有時便不易理解。

定義1: 設 A, B爲樣本空間 Ω 中二事件, 且 $P(B)>0$。則在給定 B 發生下, A 發生之條件機率, 以 $P(A|B)$表之, 定義爲

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}。\tag{1}$$

在條件機率的定義中, B 成爲新的樣本空間: $P(B|B)=1$。也就是原先的樣本空間 Ω 修正爲 B。所有事件發生之機率, 都要先將其針對與 B 的關係做修正。舉幾個特例來看。假設

$P(B)>0$。若 A 與 B 爲 互斥 (disjoint) 事件 (即 $A\cap B=\emptyset$), 則知道 B 發生, A 必不發生, 所以 $P(A|B)$ 應爲 0。因 $P(A\cap B)=0$, 故 (1) 式的確給出 $P(A|B)=0$; 若 $P(A)$ 亦爲正, 則此時亦有 $P(B|A)=0$。另外, 若 $B\subset A$, 因 $P(A\cap B)=P(B)$, 故 $P(A|B)=1$。這當然是正確的。因 $B\subset A$, 故若知道 B 發生, 則 A 就一定發生。最後, 若 $A\subset B$, 則因 $P(A\cap B)=P(A)$, 故 $P(A|B)=P(A)/P(B)$。這當然也是對的。因在給定 B 之下, B 成爲新的樣本空間, 而 A 包含於 B, A發生的可能性, 就是 A 在 B 中所佔的 “分量”, 即 $P(A)/P(B)$。

先給二例。

例4: 玩梭哈時, 要拿到 4條很不容易。52張撲克牌, 隨機地發 5張, 其中有 4張點數相同之機率爲

$$\frac{13\cdot 48}{\binom{52}{5}}=\frac{624}{2{,}598{,}960}\doteq 0.00024,$$

的確很小。但若發了 3張牌, 皆拿到 K, 則此時會拿到 4條之機率爲何?

解: 令 B 表已發的 3張牌皆爲 K 的事件, A 表拿到 4條的事件。則

$$A\cap B=\{\text{首 3張皆爲}K,\text{第 4 、5張中有 1張}K,1\text{張非}K\},$$

且

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}\cdot\frac{48}{\binom{49}{2}},\quad P(B)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}。$$

因此

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{48}{\binom{49}{2}}=\frac{2}{49}。$$

機率顯然提高很多。

例5: 投擲一公正的銅板兩次。求兩次投擲皆得正面之機率, 給定 (i) 第 1次得到正面, (ii) 兩次投擲至少有 1正面。

解: 首先樣本空間

$$\Omega=\{(\text{正, 正}),(\text{正, 反}),(\text{反, 正}),(\text{反, 反})\},$$

且

$$P(\omega)=1/4, \forall\ \omega \in \Omega。$$

令

$$\begin{aligned} A &= \{(正, 正)\}, \\ B &= \{(正, 正), (正, 反)\}, \\ C &= \{(正, 正), (正, 反), (反, 正)\}。 \end{aligned}$$

本例即求條件機率 (i) $P(A|B)$, 及 (ii) $P(A|C)$。因

$$A \cap B = A \cap C = \{(正, 正)\},$$

故

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = 1/4。$$

又

$$P(B) = 2/4, \quad P(C) = 3/4。$$

故

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}, \\ P(A|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}。 \end{aligned}$$

在分別給定第 1次得到正面, 及兩次投擲至少有 1正面之條件下, 兩次皆得正面之機率, 分別是 1/2 及 1/3。很多初學者對第二個條件機率不是 1/2 而是 1/3 常感到困惑。他們認爲在給定兩次投擲至少有 1正面下, 導致有兩個可能的情況:

(i) *兩次皆爲正面*, *及* (ii) 1*正面* 1*反面*。

因此所求之機率應爲 1/2。他們誤以爲相同可能性到處適用。殊不知原先樣本空間 Ω 中的 4個元素, 的確有相同的可能性; 一旦給定至少有 1正面, 等價於告知兩次投擲的結果不可能是 (反, 反), 因此只剩 3個相同可能性的結果 (正, 正), (正, 反), (反, 正)。而其中只有 1個結果是兩次皆爲正面。故所求之機率爲 1/3。

在機率中處處可見條件機率。一方面是的確常會遇到求在給定某條件下之機率; 另一方面, 某些機率值, 雖原先並非以條件機率的形式出現, 有時卻可經由條件機率求得。底下陸續會說明。

由 (1) 式得

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)。 \tag{2}$$

故若知道 $P(A|B)$ 及 $P(B)$, 則可得到 $P(A\cap B)$。當然只要 $P(A)>0$, 便亦有

$$P(A\cap B)=P(B|A)P(A)。\tag{3}$$

結合 (2) 與 (3) 式, 得

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}。\tag{4}$$

此後若不特別聲明, 當提到上式, 就隱含假設 $P(A)$ 及 $P(B)$ 皆爲正。

(4) 式爲底下貝氏定理 (Bayes' rule) 之一特例, 這是英國牧師 *貝氏* (Thomas Bayes, 1702−1761) 首先提出而得名。不過也有人認爲法國的大數學家拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749−1827), 才是第一位明確給出此定理者, 所以應稱爲 *拉普拉斯公式* (Laplace's formula)。

在給下定理前, 我們先介紹 *分割* (partition)。對一樣本空間 Ω, 事件 $A_1,A_2,\ldots$, 若滿足 *兩兩互斥*, 即 $A_i\cap A_j=\emptyset$, $\forall\ i\neq j$, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$, 便稱爲 Ω 之一 *分割*。當然也可以有有限的分割 $A_1,\ldots,A_n$, $n\geq 2$。

定理 1: 設 $A_1,A_2,\ldots$ 爲樣本空間之一分割。則對任一事件 B,

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B|A_i)P(A_i)。\tag{5}$$

在 (5) 式中, 若有某一 $P(A_i)=0$, 則雖此時 $P(B|A_i)$ 沒定義, 但只要將 $P(B|A_i)P(A_i)$ 定義爲 0, 則 (5) 式仍成立。

定理 2: *貝氏定理*。設 $A_1,A_2,\ldots$ 爲樣本空間之一分割。則對任意 $i\geq 1$, 及事件 B, 只要 $P(B)>0$,

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty}P(B|A_j)P(A_j)}。\tag{6}$$

例 6: 有甲 、乙 、丙三囚犯, 國王宣佈以抽籤決定釋放其中一位, 處決另兩位。他告訴獄卒那一位將被釋放, 但要求獄卒不可先透露。甲於要求獄卒透露那一位會被釋放遭到拒絕後, 改問獄卒 “乙及丙中, 那一位會被處決? ” 獄卒經過一番思考, 遂 (誠實地) 告訴甲, “乙會遭處決”。他認爲這樣做並未違反國王的規定, 原因爲:

> *乙 、丙二人, 至少有一會遭處決, 這是大家都知道的, 因此他並未提供甲任何有關甲是否會被釋放的有用資訊。*

甲聽到獄卒說乙會被處決後很高興。原先他有 $1/3$ 的機率遭釋放, 現因只剩他與丙了, 所以他會被釋放的機率提高至 $1/2$。

究竟獄卒與甲的分析, 何者正確?

解: 令 A, B, C 分別表甲 、乙 、丙三人會被釋放的事件。如果我們考慮的結果是誰會被釋放, 則樣本空間 $\Omega = A \cup B \cup C$。由假設

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3。$$

令 K 表獄卒說 "乙會被處決" 的事件。必須要了解, 若乙 、丙皆會被處決, 獄卒其實是自乙 、丙中, 任挑一位 (即各 $1/2$ 的機率, 我們隱含做了此假設) 告訴甲誰會被處決; 若乙將被釋放, 獄卒只能告訴甲, "丙會被處決"; 若丙將被釋放, 獄卒只能告訴甲, "乙會被處決"。我們想求 $P(A|K)$。

首先由定理1:

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K|A)P(A) + P(K|B)P(B) + P(K|C)P(C) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}。\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P(A|K) &= \frac{P(\text{獄卒說乙會被處決, 且甲被釋放})}{P(K)} \\ &= \frac{1/3\cdot 1/2}{1/2} = \frac{1}{3}。\end{aligned}$$

換句話說, 在獄卒告訴甲, "乙會被處決後", 甲被釋放的機率 (即 $P(A|K)$) 仍維持爲 $1/3$。此一資訊, 對甲可說是沒用的。

讀者可能會好奇, 那獄卒所提供的資訊是否便毫無用處呢? 那倒未必。若丙偷聽到獄卒與甲的對話, 則便知他被釋放的機率 (即 $P(C|K)$) 提高至 $2/3$ 。而若乙偷聽到獄卒與甲的對話, 則便知沒有活命的機會了 (即 $P(B|K) = 0$)。這樣說好了, 乙 、丙二人中, 有一人被釋放之機率爲 $2/3$ 。若給定乙被處決, 則丙便獨自擁有全部被釋放之機率, 即 $2/3$ 。至於甲, 被釋放之機率並未改變, 還是 $1/3$ 。而三人被釋放之條件機率和,

$$P(A|K) + P(B|K) + P(C|K) = 1/3 + 0 + 2/3,$$

仍是 1。

最後, K 的機率爲 $1/2$, 直觀上是對的, 這點讓各位自行想一想。

上例再度顯示, “相同可能性” 並非到處適用。又對條件機率, 必須要謹慎處理, 否則極易犯錯。上例最早是 Tierney (1991) 所提出, 有時以不同的型式出現。如著名的 汽車與山羊問題 (Car-Goat Problem), 即爲一例。此問題亦曾出現在 2008年一部很賣座的電影 決勝21點 (21) 中。有三扇門, 其中有一扇門後有汽車, 另兩扇門後各只有一頭山羊。能得到汽車當然是比較好的。你選定一扇門後, 主持人打開另兩扇門中的一扇, 發現門後是山羊, 問你是不是要更改選擇。如上例中的討論, 若主持人事先知道汽車在那一扇門後, 則換是較好的選擇; 但若主持人事先不知汽車在那一扇門後, 則可能打開一扇門後有汽車, 此時遊戲結束; 而若打開的那扇門後是山羊, 則換或不換, 會得到汽車的可能性相同, 即機率皆爲 $1/2$。

例 7: 衛生局至高雄大學免費檢驗某疾病。假設檢驗的結果有正 、負兩種反應。如果呈正反應, 便表示可能有病, 須至醫院做進一步檢驗; 如果呈負反應, 則衛生局便認爲沒有問題。衛生局宣稱檢驗之可靠度爲 90%, 且平均每 5,000人中, 有一人患此病。基於上述資訊, 你是否願意接受此檢驗?

解: 題意顯示, 檢驗並非百分之百可靠, 但醫學上通常也沒有完全精確的檢驗。可靠度 90% 的意義爲, 若無病, 檢驗會呈負反應之機率爲 0.9; 若有病, 則檢驗會呈正反應之機率亦爲 0.9。但我們該知道的, 其實是當檢驗呈正反應下, 的確有病的機率, 及當檢驗呈負反應下, 的確無病之機率。

以 “正” 表檢驗呈正反應, “負” 表檢驗呈負反應。則

$$\begin{aligned} P(\text{有病}|\text{正}) &= \frac{P(\text{正}|\text{有病})P(\text{有病})}{P(\text{正}|\text{有病})P(\text{有病}) + P(\text{正}|\text{無病})P(\text{無病})} \\ &= \frac{0.9 \cdot \dfrac{1}{5,000}}{0.9 \cdot \dfrac{1}{5,000} + 0.1 \cdot \dfrac{4,999}{5,000}} \\ &= \frac{9}{5{,}008} \doteq 0.001797。\end{aligned}$$

即當檢驗呈正反應, 會有病的機率, 才約 0.001797, 不到 $1/500$, 與所謂 90% 可靠度實在差太遠。看到此結果, 你可能不太想接受檢驗了, 否則一旦呈正反應, 要到醫院受罪。有趣的是, 當檢驗呈負反應下, 的確無病的機率倒是很接近 1:

$$P(\text{無病}|\text{負}) = \frac{44{,}991}{44{,}992} \doteq 0.999977773。$$

難道檢驗只對呈負反應可靠? 似乎不該如此。那原因何在?

直觀上看, 由於檢驗有 10% 的錯誤沒病卻呈正反應, 而在每 5,000人中, 有病的很少 (平均才 1人), 因此在 5,000人中, 約有 500個正反應, 但其中才約 1人有病。$1/500 = 0.002$, 與

所求出的 0.001797 就接近了。那檢驗不就沒什麼用? 也不盡然, 本來任何 1人有病的機率爲 $1/5{,}000 = 0.0002$, 一旦檢驗呈正反應, 有病的機率升爲 0.001797, 約成爲 8.985倍, 增加了不少。至於任何一個人被認爲沒病之機率原先爲 $4{,}999/5{,}000 = 0.9998$, 本來就很接近 1, 一旦檢驗呈負反應, 只是略微升高而已。

在患病比率爲 1/5,000, 於不同檢驗可靠度下, 表 1給出當檢驗呈正反應時, 有病之機率。可看出即使檢驗可靠度高達 99.99%, 當檢驗呈正反應, 有病之機率也才約 2/3。主要是此爲罕見疾病之故。切記條件機率 P(正|有病) 與 P(有病|正)是完全不同的。因此千萬不要被那些宣稱高可靠度的檢驗所誤導。特別是對罕見疾病, 更要注意條件機率。本例也顯示, 何以醫學上奇蹟偶而總會出現。有些被醫生判定無救者, 最後卻安然出院。看到這種現象, 讀者應同意, 醫生也該學點機率, 尤其是條件機率。

檢驗可靠度	90%	95%	99%	99.9%	99.99%
P(有病|正)	0.001797	0.003786	0.019419	0.166556	0.666689

表1. 患病比率 1/5,000, 於不同檢驗可靠度下之 P(有病|正)

最後, 當檢驗可靠度爲 90%, 於不同患病比率下, 我們亦給出 P(有病|正) 於表 2。此表顯示, 患病比率愈高, P(有病|正) 也隨之提高。當患病比率達到平均每 2人中有 1人, 此機率爲 0.9, 與檢驗可靠度 90%相同; 當患病比率高達平均每 5人中有 4人, 此機率則高達 $36/37 \doteq 0.97297$。

患病比率	1/5,000	1/5,00	1/50	1/5	1/2	4/5
P(有病|正)	9/5,008	9/508	9/58	9/13	9/10	36/37

表2. 檢驗可靠度 90%, 於不同患病比率下之 P(有病|正)

下例將有助於釐清前言中那 3個例子。

例8: 有一對夫妻剛搬進某社區, 大家只知他們有兩個小孩, 並不知性別。某日社區一管理員, 見到此家之媽媽帶著家中一小孩在玩耍。若該小孩是女孩, 求此家兩小孩皆爲女孩之機率。

解: 先定義下述事件:

G_1 : 老大是女孩,

G_2 : 老二是女孩,

G : 媽媽帶著的小孩是女孩。

次將女孩改爲男孩, 類似地定義 B_1 及 B_2。本例即要求 $P(G_1\cap G_2|G)$。依定義

$$P(G_1\cap G_2|G)=\frac{P(G_1\cap G_2\cap G)}{P(G)}=\frac{P(G_1\cap G_2)}{P(G)},\tag{7}$$

此處用到明顯的事實 $G_1\cap G_2\subset G$。利用定理 1, 得

$$\begin{aligned}P(G)&=P(G|G_1\cap G_2)P(G_1\cap G_2)+P(G|G_1\cap B_2)P(G_1\cap B_2)\\&\quad+P(G|B_1\cap G_2)P(B_1\cap G_2)+P(G|B_1\cap B_2)P(B_1\cap B_2)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}P(G|G_1\cap B_2)+\frac{1}{4}P(G|B_1\cap G_2)。\end{aligned}\tag{8}$$

在上式中用到

$$P(G|G_1\cap G_2)=1,\quad P(G|B_1\cap B_2)=0,$$

且

$$P(G_1\cap G_2)=P(G_1\cap B_2)=P(B_1\cap G_2)=P(B_1\cap B_2)=\frac{1}{4},$$

這是因假設生男生女的機率均爲 1/2。將 (7) 式分母的 $P(G)$ 以 (8) 代入, 得

$$\begin{aligned}P(G_1\cap G_2|G)&=\frac{1/4}{1/4+P(G|G_1\cap B_2)/4+P(G|B_1\cap G_2)/4}\\&=\frac{1}{1+P(G|G_1\cap B_2)+P(G|B_1\cap G_2)}。\end{aligned}\tag{9}$$

故欲求之 $P(G_1\cap G_2|G)$ 爲何, 與 $P(G|G_1\cap B_2)$ 及 $P(G|B_1\cap G_2)$有關。

底下先看幾個特別的情況。

情況 (i): 假設不論兩小孩之性別爲何, 若只帶一小孩出門, 媽媽帶老大出門之機率爲一定值 p (因此帶出門的是老二的機率爲 $1-p$)。實際上媽媽帶老大出門的機率, 可與兩小孩之性別有關, 我們稍後將討論。即假設

$$P(G|G_1\cap B_2)=p,\quad P(G|B_1\cap G_2)=1-p。$$

代入 (9) 式, 得

$$P(G_1\cap G_2|G)=\frac{1}{1+p+(1-p)}=\frac{1}{2}。$$

即原問題之答案爲 1/2, 與 p 無關。

情況 (ii): 假設當兩小孩之性別不同, 則媽媽帶女兒出門之機率爲一定値 q, 不論她是老大或老二。即假設

$$P(G|G_1\cap B_2)=P(G|B_1\cap G_2)=q。$$

代入 (9) 式, 得

$$P(G_1\cap G_2|G)=\frac{1}{1+q+q}=\frac{1}{1+2q}。\tag{10}$$

因此, 這時兩小孩皆爲女孩之條件機率與 q 有關。例如, 設 $q=1$, 即若有兒子及女兒, 媽媽一定帶女兒出門, 則 $P(G_1\cap G_2|G)=1/3$。此其實即爲例 5的 (ii)。因 "看到該家媽媽帶女兒出門", 等價於 "該家至少有一女兒"。次設 $q=1/2$, 即若有兒子及女兒, 媽媽會帶女兒或兒子出門之機率各半, 則 $P(G_1\cap G_2|G)=1/2$。又當 $q=0$ 時, $P(G_1\cap G_2|G)=1$。注意在 (10) 式中之機率$P(G_1\cap G_2|G)$, 爲一 q 之漸減函數, 且

$$1/3\le P(G_1\cap G_2|G)\le 1。$$

我們發現, 除非有其他資訊, 否則看到該家媽媽帶著一個女孩, 並不能解讀爲, 此資訊等價於 "該家至少有一女兒"。這可能與不少人想的不同。又情況 (i) 及情況 (ii), 並非樣本空間之一分割, 甚至兩情況也不互斥。

由上討論知, 依題意所給條件, 本問題並無法解出。雖然我們已較原題意, 多做了一個生男生女機會相等的假設。但並不夠, 必須要有額外的假設, 否則無法給出原問題的解。爲什麼會這樣呢?

我們在求機率時, 常不太在意機率空間。大部分的時候也相安無事, 能得到正確的答案。但有時遇到較細膩的情況, 就得將機率空間弄清楚。事實上, 在本問題裡, 樣本空間 Ω 中有 8個元素, 包含所有型如 (s_1,s_2,i) 的樣本, 其中 s_1 爲老大之性別, s_2 爲老二之性別, 而 i 爲所見到媽媽帶著的小孩之排序 (老大或老二)。欲知 $\forall\ \omega\in\Omega$ 的機率, 光給 (s_1,s_2) 之機率不夠, 還須做額外的假設。譬如說, 須知 "給定媽媽帶著的小孩之性別下, 該小孩之排序" 的條件機率。

在生男生女的機率均爲 1/2 的假設下, Ω 中 8個元素的機率爲:

$$\begin{aligned}
P(\{(\text{女},\text{女},\mathrm{I})\})&=\frac{p_1}{4},\quad P(\{(\text{女},\text{女},\mathrm{II})\})=\frac{1-p_1}{4},\\
P(\{(\text{女},\text{男},\mathrm{I})\})&=\frac{p_2}{4},\quad P(\{(\text{女},\text{男},\mathrm{II})\})=\frac{1-p_2}{4},\\
P(\{(\text{男},\text{女},\mathrm{I})\})&=\frac{p_3}{4},\quad P(\{(\text{男},\text{女},\mathrm{II})\})=\frac{1-p_3}{4},\\
P(\{(\text{男},\text{男},\mathrm{I})\})&=\frac{p_4}{4},\quad P(\{(\text{男},\text{男},\mathrm{II})\})=\frac{1-p_4}{4}.
\end{aligned}$$

其中 I, II 分別表媽媽帶著的小孩爲老大或老二之事件。附帶一提, p_1 即爲給定兩小孩皆爲女孩 $(G_1 \cap G_2)$ 之下, I 發生 (媽媽帶著的小孩爲老大) 之機率, p_2, p_3 及 p_4的意義可依此類推。因

$$G \cap G_1 \cap B_2 = \{(\text{女}, \text{男}, \text{I})\}, \quad G \cap B_1 \cap G_2 = \{(\text{男}, \text{女}, \text{II})\},$$

故

$$P(G|G_1 \cap B_2) = \frac{P(\{(\text{女}, \text{男}, \text{I})\})}{P(\{(\text{女}, \text{男})\})} = \frac{p_2/4}{1/4} = p_2,$$

且

$$P(G|B_1 \cap G_2) = \frac{P(\{(\text{男}, \text{女}, \text{II})\})}{P(\{(\text{男}, \text{女})\})} = \frac{(1-p_3)/4}{1/4} = 1 - p_3\text{。}$$

將上二式代入 (9) 式, 得

$$P(G_1 \cap G_2|G) = \frac{1}{1 + p_2 + 1 - p_3} = \frac{1}{2 + p_2 - p_3}\text{。} \tag{11}$$

即要知道 $p_2 - p_3$ 之值, 才能得到所欲求之機率 $P(G_1 \cap G_2|G)$。特別地, 當 $p_2 = p_3 = p$, 則

$$P(G_1 \cap G_2|G) = \frac{1}{2},$$

與之前的情況 (i) 所得吻合; 當 $p_2 = q$, $p_3 = 1 - q$, 則

$$P(G_1 \cap G_2|G) = \frac{1}{1 + 2q}, \tag{12}$$

與之前情況 (ii) 所得吻合。即前述情況 (i) 及 (ii), 有 p 有 q, 看起來似乎包含很多可能, 其實均只爲本一般情況之特例。

在上例中, 尙可有其他情境。如

(i) 管理員問那位媽媽 “你有沒有女兒?” 媽媽答 “有”;

(ii) 管理員問那位媽媽 “你老大是女兒嗎?” 媽媽答 “是”;

(iii) 管理員見到那位媽媽帶兩個小孩及一條狗在玩耍, 其中有一女兒站著, 另一小孩跪在地下, 但被狗遮住, 看不出性別。

各位可分別對此三情況, 求此家兩小孩皆爲女孩之機率。

最後回到一開始那三個例子。

對於例1, (i) 之答案爲 1/2, 應很容易理解。至於 (ii), 若無其他資訊, 則假設 “有一個女孩”, 等價於 “家中至少有一女孩”, 仿例 5之 (ii), 可得另一小孩亦是女孩之機率, 的確爲 1/3。

對於例2, 若假設當丙看到兩硬幣有 1正面及 1反面朝上, 便各有 1/2的機率說 “有一個正面” 及 “有一個反面”, 則此對應例 8中的情況 (ii), 且 $q = 1/2$, 此時朝上的兩面相同及相

異的機率皆爲 1/2。也就是在此情況下, 丙所提供的資訊是沒用的。但若 $q \neq 1/2$, 則丙所提供的資訊就會有用了。這時可類似如例 8的討論。

最後對於例 3, 仍對應例 5之 (ii), 兩小孩皆爲女孩之機率的確爲 1/3。

要注意的是, 在例 2中, 丙說 "有一個正面" (假設若有一正面一反面, 則有 1/2之機率丙說有一個正面), 及問丙 "有沒有正面?" 丙答 "有", 此二事件是不一樣的。前者之機率爲 1/2, 後者爲 3/4。

3. 結語

2008年美國總統大選, 民主黨於 8月底舉行全國代表大會, 決定正副總統候選人。接著在 9月 4日, 美國共和黨的全國代表大會上, 阿拉斯加州的州長裴林 (Sarah Palin), 被提名爲共和黨的副總統候選人。原先共和黨總統候選人馬侃 (John McCain) 的民意支持度, 落後民主黨的總統候選人歐巴馬 (Barack Obama)。於提名斐林後, 馬侃人氣迅速竄升, 聲勢立漲, 在幾份不同的民調中, 均勝過歐巴馬, 共和黨陣營當然很興奮。但一位長期研究美國大選的專家, 維吉尼亞大學 (University of Virginia) 政治學者薩巴托 (Larry Sabato), 根據 1960年以來的資料, 指出全代會後民調結果與大選結果相符者, 只有一半, "跟丟銅板預測差不多 (You could flip a coin and be about as predictive)"。又說 "大會回憶褪色之迅速, 令人意外 (It is really suprising how quickly convention memories fade)"。

民意如流水, 對政治人物無情, 是偉大國家的象徵。固然不用因全代會後民調領先而過度高興。但對共和黨而言, 是否全代會後隨即做的民調, 不論領先或落後, 於當年 11月的總統大選, 其提名人當選或落選之機率相同, 也就是皆爲 1/2? 如果眞是如此, 那全代會後所做之民調, 就確實是沒用了。民調無用, 統計工作者可能會有點沮喪。但統計學者針對此問題, 有沒有可以著墨處? 還是聽了那位政治學者之分析後, 便只能閉嘴?

依薩巴托的分析, 可假設

$$P(\text{當選}|\text{領先}) = P(\text{落選}|\text{領先}) = 1/2, \tag{13}$$

其中 "領先" 表在兩黨全國代表大會, 已決定正副總統候選人後, 在對兩組候選人所立即做的民調, 共和黨領先; "當選" 表在當年總統大選時共和黨獲勝。類似地, 可定義 "落後" 及 "落選"。在 (13) 式之假設下, 我們想知道

$$P(\text{當選}|\text{落後}) = P(\text{落選}|\text{落後}), \tag{14}$$

是否成立? 如果 (14) 式成立 (即 (14) 式左 、右二側之機率皆爲 1/2), 則全代會後的民調領先或落後, 共和黨便可不必在意了。甚至此民調根本就是多餘的。

令
$$P(\text{當選}|\text{落後}) = a, \tag{15}$$

則
$$P(\text{落選}|\text{落後}) = 1 - a。\tag{16}$$

但由 (13) 式, 並無法決定 a 值。我們再令

$$P(\text{當選}) = r, \quad P(\text{領先}) = s,\tag{17}$$

其中 $0 < r,\ s < 1$。仍由定理 1, 得

$$P(\text{當選}) = P(\text{當選}|\text{領先})P(\text{領先}) + P(\text{當選}|\text{落後})P(\text{落後}).\tag{18}$$

再由 (13)、(15) 及 (17) 式, 且利用

$$P(\text{落後}) = 1 - P(\text{領先}) = 1 - s,$$

(18) 式可改寫為

$$r = \frac{1}{2}s + a(1 - s)。\tag{19}$$

即

$$a = \frac{r - s/2}{1 - s}。\tag{20}$$

若 $r = s = 1/2$, 則 $a = 1/2$, 且 (14) 式成立。也就是若過去的資料顯示, 兩黨全代會後做的民調, 及選舉結果, 兩黨表現眞的一樣 (即民調領先, 及當選機率, 皆為 1/2), 則全代會後的民調領先或落後就眞的對當選與否, 沒有影響了。至於若 $r = 0.48$, $s = 0.5$, 則 $a = 0.46 < 1/2$; 若 $r = 0.52$, $s = 0.6$, 則 $a = 0.55 > 1/2$。a 之值乃與 r 及 s 有關。

所以共和黨不必因聽了 “專家” 的話, 就誤以為全代會後的民調結果, 對大選時誰當選沒有影響。民主黨也是一樣。當然 11 月大選, 如大家所知是歐巴馬當選。此時之前說誰當選的機率為何, 便都沒用了。條件機率之功能再度顯現 (給定的條件是歐巴馬當選)。

總之, 在應用機率, 特別是處理條件機率時, 須得很謹愼, 否則極易犯錯。最後我們給幾道習題讓大家練習。

1. 假設有四個盒子, 其中恰有一盒裝有獎品, 且設主持人知道獎品在那一盒。某君任選一盒, 然後主持人打開其餘三盒中之一盒, 並發現其中並無獎品。此時若該君不改變選擇, 則獲獎之機率為何? 若該君改自其餘兩盒中任選一盒, 則獲獎之機率為何?
2. 考慮下述賭局。莊家 A 向顧客們展示三張牌, J, Q, K 各一張。洗牌後, 將一張牌放在一盒子內, 另兩張面朝下放在桌上。有一助理 B, 翻了桌上兩張牌, 然後拿起一張, 並展示給顧客們看, 假設是 Q。此時顧客可以開始賭在盒內的牌是否為 K。賭法如下: 賭盒內的牌

爲 K 的, 要買張 8元的票, 若對了, 可得 18元; 賭盒內的牌不爲 K 的, 票每張 11元, 若對了, 亦可得 18元。有些顧客想, 盒內的牌會是 K 的機率爲 1/3, 因此他們買非 K 的票, 心想有 2/3 的機率會得到 18元, 平均可得 12元, 比票價 11元還多 1元。另有一些顧客想, 只剩兩張牌, K 和 J 各有 1/2 的機率, 因此他們買 K 的票, 心想有 1/2 的機率會得到 18元, 平均可得 9元, 比票價 8元還多 1元。另一顧客 C, 他偷偷地要求 B 透露一些內幕。B 告訴他: A 的洗牌絕無問題。而 B 所接受的指示是, 翻看桌上的兩張牌, 若都不是 K, 則隨便拿一張給顧客看。但若桌上的兩張牌中有一張是 K, 則 B 必須拿非 K 的那張給顧客看。此因票是事先印製的, 若讓顧客知道 K 已不在盒內, 則此賭局便無意義了。試問 C 該如何賭?

3. 電影 越戰獵鹿人 (The Deer Hunter) 裡, 有一描述虐待戰俘的方法。在一可裝 6發子彈的左輪手槍 (revolver) 裡, 只放一顆子彈, 隨機地一轉後, 要二戰俘輪流用手槍向自己的頭部發射, 直到一名戰俘中槍, 另一名戰俘才逃過一劫。這就是所謂 俄羅斯輪盤 (Russian roulette) 的遊戲。試問
   (i) 先發射者是否較不利?
   (ii) 若改爲放兩顆子彈, 結果有何不同?
   (iii) 若改爲每次發射前, 均須將彈匣隨機地一轉, 則結果有何不同?

参考文獻

1. 黃文璋, 隨機思考論 (第五章瞻前顧後), 華泰文化事業股份有限公司, 台北, 2003。
2. Hille, J. W., A Bayesian look at the jury system. *Mathematical Spectrum*, 11, 45-47, 1978/79.
3. Stewart, I., The interrogator's fallacy. *Scientific American*, 275, No.3, 134-136A, 1996.
4. Tierney, J., Behind Monty Hall's doors: puzzle, debate, and answer? *New York Times*, July 21, 1991.

— 本文作者任教國立高雄大學應用數學系—