

有朋自遠方來——專訪

Luigi Ambrosio 教授



策劃：劉太平

訪問：劉太平、劉豐哲

時間：民國98年12月3日

地點：南港中央研究院數學所

整理：陳麗伍

Luigi Ambrosio 教授出身義大利偉大的變分學學派，師承近代多元變分學及橢圓方程的傑出數學家 Ennio de Giorgi。De Giorgi 是近代數學分析領域中影響力既廣且深的數學家，特別是變分學的許多重要概念和方法及橢圓方程正則性的重要處理方法皆源自於他的想法，Ambrosio 教授師事 De Giorgi 並成為他的傳人。De Giorgi 逝世後，他在 Pisa 高等師範學校的教席即由 Ambrosio 接棒，當時 Ambrosio 才 34 歲。Ambrosio 教授在變分學的許多課題上有重要而深刻的貢獻，獲得許多獎項的肯定。他是義大利最重要的數學家之一，不但是因為他在數學上的傑出貢獻，也因為他培育了許多一流的年青數學者。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 我們開始吧，這一系列的演講讓你辛苦了，不過我們的聽眾很好，他們會問問題。

Luigi Ambrosio (以下簡稱「A」): 通常講課的時候會感受到課堂的氣氛，我覺得這次氣氛不錯，有人是真的對演講的內容有興趣。

劉: 我和你提過，我聽你的課覺得很振奮，你的回答很深刻，你講課是沒話說的，我們就不談這個了。你說你來自義大利南部，南部的什麼地方？

A: 哦,我家族來自那不勒斯 (Naples),一直到現在都住在義大利南部,不過是在另一個海岸,在亞德利亞 (Adriatic) 海邊叫做 Puglia 區的城市。Ennio de Giorgi¹也是來自同一個地區,不過不是同一個城市。

劉:有人說大部分從事學術工作的人大致有二種出身,一是來自學術家庭,或是,嗯,我這麼說吧,不是高收入的家庭。你是不是在這二者之一?

A:我的父親是法官、律師,現在已經退休,母親是學校教師。事實上,我的家人給我很多壓力,要我成為工程師,因為數學家經濟上能有多少收入並不明確,所以我們有個協定,我必須通過在 Pisa 的高等師範學校 (Scuola Normale Superiore di Pisa) 的入學考試,考上了才可以念數學成為數學家,考不上就去念工程,結果我考上了。

劉豐哲 (以下簡稱「豐」):你的父母都不是從事數學工作的,為什麼你會選擇數學呢?

A:可能是小時候的一些經驗,大概6、7歲的時候,我的祖父雖然受的教育不多,只受過5年的小學教育,但他熱愛閱讀、下棋、玩各種牌,也許就是因為他帶我玩牌、下棋,因此開啓了我的興趣也說不定,很難說真正源自那裡。我一直,嗯,大概12、3歲的時候,我在校的數學很好,而且我對數學抱著極大的興趣想多知道些。一直以來或多或少都有這樣的動力在驅策我。

劉:你父親曾希望你念工程,他現在是不是為你感到高興?

A:是的,我一考進高等師範學校,他就不再質疑我的選擇了。

豐:是這樣,你是屬於一個了不起的學派;義大利的變分學學派,你是否因此而選擇攻讀與變分學有關的科目?

A:不,不是這樣的。起先我學數理邏輯,這方面頭一次的“研究”經驗不太好。不知怎的,我終究覺得不滿意。然後我去找 De Giorgi,因為大一上過他為年輕學生開的課,他的課非常好,他為人沉靜、低調,不會擺出大數學家的樣子。事實上,我那時對於 De Giorgi 數學的高度完全沒有概念,直到念博士時我才知道他是真正了不起的大數學家。其實,我可以告訴你們一個很好的故事,那時候我當然知道他是個好數學家,但是好和傑出還是有差別的,不是嗎?在我念博士的第二年,我在圖書館讀到 Olga A. Ladyzhenskaya² and Nina N. Ural'tseva³ 合著的 Linear and Quasilinear Elliptic Equations⁴ 這本書的前言;不知你們有沒有看過這個前言,它令人印象深刻。這本書在1960年代出版,就在 De Giorgi 發表他有名的關於「可測度係數橢圓方程解的正則性 (on regularity of solutions to elliptic equations in divergence form with measurable coefficients)」的文章後幾年。這前言

¹譯註: Ennio de Giorgi (1928-1996), 為20世紀極具影響力的義大利分析數學家,尤其在最小曲面及橢圓偏微分方程方面貢獻卓著,於1990年獲頒 Wolf Prize。

²譯註: Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya (1922-2004), 俄羅斯重要女數學家,研究專長為 PDE 及流體力學,於2002年獲頒 Lomonosov Gold Medal。

³譯註: Ural'tseva Nina Nikolaevna, 俄羅斯女數學家,現任教於 Saint-Petersburg state university。

⁴譯註: 此書於1968年 Academic Press (New York) 出版。

的前半部寫道：許多人從事這個主題的研究，這方面的文獻很多，而我們是以自己的方法來探討這個題目，並不依賴那些文獻。但是到了最末幾行出現了這樣的句子：我們沒有利用大部分其他人的工作，但是我們用了 De Giorgi 這篇文章中的一些想法！事實上，讀了這本書，你會發現它大部分建立在 De Giropi 的想法上。我這才了解到 De Giropi 的偉大；這實在也是因為他很謙虛的緣故；例如，他從沒告訴我他以前在最小曲面 (minimal surfaces) 的工作。因為我跟他做的論文題目是不同的主題，他過去的工作我就不是那麼清楚。當然在成為數學家的過程中這些我後來都知道了，知道多了，視野也更寬廣了。所以我不是因為特別的理由才去跟 De Giorgi 學習。在這點上我很幸運。

劉：所以各種各樣的數學你都喜歡。提起變分學，下周我們要舉行的 Australia-Italy-Taiwan 澳洲-義大利-台灣三邊會議，最初辦這個會議想到的主題就是變分學，是嗎？

豐：正是。那是1994年，第一次的 Taiwan-Italy 聯合會議在數學所舉行，主題就是變分學。第一次只是台灣與義大利。

劉：然後澳洲加入？

豐：澳洲很晚才加入，大概是2002。

劉：所以我們到澳洲舉行一次，再到羅馬，現在又回到這裡舉行，每隔三年舉行。說到變分學，大家都知道它溯自 Leonhard Euler⁵與 Joseph Lagrange⁶，但在義大利，變分學是什麼時候變得重要的？

A：讓我想想，Leonida Tonelli⁷ 可說是義大利變分學真正的開路先驅與領導者。當然有些方面可以溯自 Levi⁸，或 Vitali⁹，但我認為是 Tonelli 關於變分學中 Lagrange 問題中 minimizer 正則性的工作為它注入關鍵性動力的。事實上，應用 Tonelli 結果的那一類 Lagrangian 被稱為 Tonelli Lagrangian。多年後的現在回顧這些，我們可以看到從這個一維的情形已經可以看出高維時問題困難的來源，也就是奇異點集的出現、定性與其大小的估計，所以這個問題是函數空間很敏感的問題，從這個觀點看，我真認為 Tonelli 是一位先驅，當然還有 Cesari¹⁰、Picone¹¹等。

劉：是不是在義大利的什麼地方有一個研究所或建築物以 Tonelli 命名？

A：是在 Pisa 的研究所，Pisa 的數學研究所就是以 Tonelli 命名。

⁵譯註：Leonhard Paul Euler (1707-1783)，數學大師，瑞士人，在包含微積分、圖論、數論、分析、流體力學等許多數學領域做出重大貢獻。

⁶譯註：Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)，著名法國數學及天文學家，在數學、物理及天文學方面做出許多重大貢獻。

⁷譯註：Leonida Tonelli (1885-1946)，義大利數學家，最為人知的成就是 Fubini's theorem。

⁸譯註：Beppo Levi (1875-1961)，義大利數學家，最為人知的成就是 Beppo Levi's theorem。

⁹譯註：Giuseppe Vitali (1875-1932)，義大利數學家，主要研究領域為分析數學。

¹⁰譯註：Lamberto Cesari (1910-1990)，美籍義裔數學家，主要研究領域為變分方程及非線性泛函分析。

¹¹譯註：Mauro Picone (1885-1977)，義大利數學家，主要研究領域為變分學、ODE、PDE。

豐：我第一次訪問 Scuola Normale 時有一個講堂，就叫 Tonelli 講堂。

A：是的，我到台北前就在那裡上課。我認為這樣命名很好，因為帶有某種使命感。

豐：我想講一個我自己的故事，我念的第一篇數學論文就是 De Giorgi 關於周長的文章，很漂亮的結果，這是為什麼我會一點義大利文，因為那篇文章是用義大利文寫的，雖然我的義大利文有限，仍然可以讀懂。告訴我，我這樣說對不對：自 19 世紀、20 世紀初以來，變分學學派在義大利成形，由你提到的 Tonelli 開始，這個學派人才輩出，De Giorgi、Caccioppoli¹²、Stampacchia¹³ …，可以告訴我為什麼那時候變分學在義大利如此興盛？

A：我無法說出一個特定的理由。我個人認為數學研究的發展起因於一些少數的人，也許是資賦優異的人，更或許是一些天才學生，我想不出來更深刻的解釋。當然，比如提到 Caccioppoli, De Giorgi 與他討論，分享他對周長理論以及 functions of bounded variation 理論的想法，經由這些討論，De Giorgi 完成了這些工作，我們可以真正的感覺到 De Giorgi 是一個在任何一個領域都有可能出類拔萃的人，加上 Caccioppoli 的視野，這兩人成功的互動造就了一個奇蹟。好，如果他們不曾碰面，De Giorgi 一定也會成為傑出的數學家，不過可能是在另一個領域，或許是在分析領域、複分析或其他領域。

劉：學術發展有趨勢；但少數個人的作用還是很關鍵的，真好。

A：即使看看發生在我自己身上的事，你可以看到我與 De Giorgi 以及後來其他數學家之間的互動對我的研究有根本的影響，如若不是這些互動，我的研究可能完全不一樣，我想這個說法對每個人都是對的。

劉：我曾約略聽到關於 De Giorgi 和年輕人討論數學的故事，你是否可以和我們談談，因為你有第一手的經驗。

A：當學生時，我們有個笑話。我們用學生在黑板上講東西能引起他注意的時間來衡量 De Giorgi 對這個學生欣賞的程度。基本上有二個可能：第一種，他做自己的問題，看期刊，完全不理會你；第二種，他把粉筆要過來，在黑板上自說自話解答問題。所以你得到他 1 分鐘或 2 分鐘的注意，或是更多，這反映了他對你器重的程度。我們之間的互動是非正式的，除了念博士的第一年，那時還有些證明的細節需要討論；你有個問題，告訴他你做了什麼，嘗試了什麼，後來，我們之間的互動可以說大部分只在問題的層面（而不在細節），De Giorgi 那時候大約 55 歲左右，對證明的細節已經不感興趣，不太可能和他討論細節。另一方面，在「問題的層面」與他互動則收穫豐碩。他對什麼是有意思的問題，什麼是好的方向，什麼問題已經走到死胡同等等看得很清楚。我可以想見一般學生很難與他互動，低年級的學生很需要細節上的

¹²譯註：Renato Caccioppoli (1904-1959)，義大利數學家，在變分學及方程式分析等領域貢獻卓著，Caccioppoli Prize 便是為了紀念他而成立的，每兩年頒發此獎。

¹³譯註：Guido Stampacchia (1922-1978)，義大利數學家，在變分學及方程式分析等領域貢獻卓著，Stampacchia Gold Medal 便是為了紀念他而成立的，每三年頒發此獎。

訓練，但是對高年級學生，與De Giorgi 這樣的互動是很好的。也許 De Giorgi 年輕時情況有些許不同，不過我不清楚，這是當年我的經驗。

劉：你提到念博士時 De Giorgi 大約55歲，所以那時他已沒有必須要繼續發表論文或是必須維持在顛峰那種心理問題了？

A：哦，我1985年開始跟著他做研究，1970年代是 Gamma convergence 風華正盛的時候，當時 De Giorgi 學派正在顛峰，同一時間會有10, 15人以他為中心，思考不同的問題，因為 Gamma Convergence 實在是許多不同應用上的源頭。那是 Dal Maso¹⁴、Buttazzo¹⁵、Acerbi¹⁶等人的世代，到了我的時候，基本上風華已褪，幾乎沒人跟著他，事實上我是他最後幾個學生之一。他引起我對有關 BV(bounded variation) 函數的興趣，我在這方面工作了8或10年。他那時對證明定理已不感興趣，他希望大家跟隨他勾勒的前景 (vision) 前進。就我個人來說，當然我無法與 De Giorgi 相提並論，但我必須說，隨著時間流逝，我看到自己也有類似的傾向。這是為什麼我認為年輕學生與資深學者的互動是有益的，因為資深的人有前瞻。他真正讓人印象深刻的是雖然前瞻的時候很容易落入一廂情願的想法，但是他的眼光總是正確的，他非常敏銳，給正確的定義，提出正確的建議。我舉一個讓我瞠目的例子，在他晚年，1995年 (De Giorgi 1996年逝世)，對應歐氏空間中的 Federer-Fleming 理論，他提出如何發展一般 metric 空間中 currents 的理論。然後他寫了一篇只有定義，甚至沒有一個猜測(conjecture)的短文，過去他常給各樣猜測許多至今仍待證明，但在這篇文章裡，他只敘述了問題，以及一串漂亮的定義。1997年，我在找新的問題做，找了一些文章，然後和一位德國同事 Bernd Kirchheim¹⁷ 一起開始了這個計劃。老實說，我們當時很懷疑，首先我們對一般的 metric space 能有多少作為呢？結果一定很有限，因為 Federer-Fleming 理論中的許多證明大量用到歐氏空間或黎曼空間的結構，然而最後的結果連我們自己都嚇了一跳，因為用這些定義，我們得到一個新的理論。甚至在一般的空間也是成立的，甚至於還簡化了 Federer-Fleming 的文章，因為我們用的是更基本的工具。這對我們完全是個意外。當然這些證明是我們給的，De Giorgi只給了定義，但是他給了正確的定義，這絕不簡單。你們瞭解我想說的吧！這不僅只是心想就能事成的。這真的讓我吃驚，因為我對這個計劃沒有信心，至少在剛開始的時候。後來我是有些信心，只是我完全想不到最後得到這麼好、這麼一般的結果。

劉：De Giorgi 1995 的時候多大年紀？

¹⁴ 譯註：Gianni Dal Maso, 主要研究領域為變分學及最優化控制，現任教於 SISSA (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati/International School for Advanced Studies)。

¹⁵ 譯註：Giuseppe Buttazzo (1954-)，義大利數學家，現任教於 Pisa 大學。

¹⁶ 譯註：Emilio Acerbi (1955-)，義大利數學家，現任教於 Parma 大學。

¹⁷ 譯註：Bernd Kirchheim, 現任教於英國牛津大學。

A: 他 1928 年出生, 那時大概將近 70 了。

劉: 他是好老師嗎?

A: 是的, 他的風格很特別, 怎麼說呢, 首先他有獨特的數學品味, 譬如, 他的測度論 (measure theory) 與變分學的課堂內容在任何教科書都找不到, 很有創見。有些時候他也有些糊塗, 但是他的觀點是這麼新穎, 也許隱藏在什麼裡面以至於認不出來, 但是最終當然你會欣賞這樣的觀點。他還有個習慣, 絕不給啓發性的想法 (heuristic ideas), 而我不是這樣, 所以他是很有 Bourbaki¹⁸ 的風格; 這是定理, 這是證明, 對證明不做任何評論。我年紀比較大也比較有信心後, 有一次針對這事問他, 他告訴我給學生啓發性的想法已經給學生一個先入爲主的觀點, 爲什麼要告訴學生呢? 這是他的想法, 學生應該要從證明中建立自己的想法。當然這是困難的, 他的方式是讓學生因而學之, 因爲你如果無法了解證明背後的想法就無法形成對證明的了解。他會說:『這是學生, 不是我的課題, 也就是說我有個想法做這個, 但是我不會把它告訴學生, 他們最好能嘗試自己找到他們自己的想法。』不過至少我個人的方式是給啓發性的想法, 我能理解 De Giorgi 這麼做背後的理由, 我還是覺得至少給一點暗示或建議是有益的, 雖然給建議, 某些方面可能會讓學生們落入單一的想法, 不利於發展新的觀點; 從相同的想法開始也許無法有新的展望。

劉: 不管哪樣是對的, 不容置疑的, 他是以自己的方式來體恤人。

A: 他是很好的人。

豐: 自己去理解證明。很久以前我聽過關於 De Giorgi 的故事, De Giorgi 和其他幾位有名的數學家喜歡打橋牌, 其中包括目前在普林斯頓高等研究院的著名數學家。

A: Bombieri¹⁹?

豐: 是, 就是 Bombieri。他、Bombieri 以及其他幾個人。De Giorgi 不在意輸贏, 但是 Bombieri 極其在意, 是嗎?

劉: 這可是個敏感的話題。

A: 這個嘛, 我不清楚, 我晚了很多年。以前我的棋力幾乎達到職業水準, De Giorgi 也喜歡和年輕學生在一起, 甚至一起吃中飯, 記得有一次我和他下棋, 兩三下就收拾了他, 我以為他的棋力不怎麼樣, 掉以輕心, 結果輸了第二盤。

豐: 這個故事很有意思。

A: 下棋這事永遠說不準。

劉: 你關注運輸最佳化 (optimal transportation) 的理論已經好多年了。

A: 大約從 2000 年開始。

¹⁸譯註: Nicolas Bourbaki 爲 20 世紀一群法國數學家之筆名, 自 1935 年開始撰寫一系列探討高等數學心得之書籍。

¹⁹譯註: Enrico Bombieri(1940-), 義大利數學家, 主要研究領域爲數論分析, 現任職於美國普林斯頓高等研究院。曾於 1974 年獲頒 Fields Medal。

劉: 你這一系列的演講真好。你怎麼進入這個領域的?

A: 就像一般的事情一樣, 這也是隨機開始的。事實上是因為 Bouchitté²⁰ and Buttazzo 合寫形狀最佳化 (shape optimization) 的文章, 其中他們發現與最佳運輸 (optimal transport) 的關連。顯然他們的問題與運輸最佳化問題無關, 但反而最佳化條件與運輸最佳化的條件有顯然、密切的關係。這篇文章投稿到 Journal of the European Mathematical society, 我是主編之一, 我就開始看這篇文章, 後來又看到 Craig Evans²¹ 的文章, 就是我演講中提到的文章, 我深深為這個題目著迷。其實, Craig Evans 也給我一個重要的建議, 他對我說: 因為我對測度論和機率的了解, 我應該看看 Sudakov²² 的文章, 他又說, 不過這篇文章很不容易看懂; 而後來我發現這文章中有錯。

豐: 什麼文章?

A: 一位有名的俄羅斯機率學者 Sudakov 關於運輸最佳化問題的文章, 他處理的是成本等同距離的情況。這篇文章有一個隱晦不顯的錯誤, 經過過去幾年許多人的努力, 已經修正了這個錯誤, 所以這也是頗有趣的。

劉: 但是這篇文章裡含有有意思的想法。

A: 是的。Sudakov 所犯的錯誤說明了我們對 Lebesgue measure 的直觀想法在某些情形下可以愚弄了我們。

劉: 你能不能就這一點多說些?

A: 好, 基本上 Sudakov 所犯的錯誤是這樣的; 取 n 維歐氏空間的 Lebesgue 測度 (measure), 取一組不相交的線, 這些線相應於運輸問題中的運輸線 (transport line), 他的想法是將 Lebesgue 測度分解成重疊 (superposition) 的一組測度 (measure), 其中每一個測度相應一條線上的測度, 那麼這些 1 維測度對 1 維線上的 Lebesgue 測度幾乎應該都是絕對連續 (類似於 Fubini 定理)。他也簡略地證明了上面的敘述, 聽起來很合理, 然而試著做嚴格的證明時, 卻屢試屢敗。事實上這個性質是錯的, 我們造出一個 Lebesgue 測度的分解, 而它卻沒有絕對連續的性質。下一個問題就是找出一個介於中間的, 運輸最佳化問題裡面運輸線的分布所能滿足的正則性質 (regularity property), 而這個性質又足以導出絕對連續性。經過許多人的努力, 最終是由 Bianchini²³ 和他的同儕們找出了關鍵的性質。

豐: 這是個困難的問題。記得上次 Bianchini 來的時候, 他問了我有關的問題, 不過那時候, 我真的不清楚, 當然問題在我。現在我比較了解了。

²⁰ 譯註: Monsieur Guy Bouchitté, 現任教於 Université du Sud Toulon-Var。

²¹ 譯註: Lawrence Craig Evans(1949-), 現任教於柏克萊加州大學。2004年獲頒 Leroy P. Steele Prize。

²² 譯註: V. N. Sudakov, 現任教於聖彼得堡俄羅斯科學院的斯捷克洛夫數學研究所 (St.Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute)。

²³ 譯註: Stefano Bianchini (1970-), 義大利數學家, 現任教於義大利 SISSA, 專長分析, 偏微分方程, 多次訪問數學所。

劉: 是啊, Bianchini 解出這個問題很興奮, 他教我為什麼測度這麼重要。我了解到這問題是從你那裡來的。

A: 嗯, 是極可能。

豐: 所以這與你剛剛說的也有關係, 這是一般 metric 空間中變分學的某種概念?

A: 有一點關係。讓我多談點 metric spaces 裡的 Calculus of Variations in Gradient Flows。在許多應用背後主要的想法就是可以把機率測度空間視為一個 metric 空間, 然後你希望能描述某些演化的問題, 例如 gradient 型的問題。結果顯示即便在沒有微分結構 (differential structure) 的情形下, 還是可以用僅有的 metric 結構, 這迫使你必須用最基本的概念來描述一個梯度流 (gradient flow) — 也就是用能量消散的速率。僅僅只用這個做為基本的工具, 即使在可不用 metric 的觀點而有微分的結構的情況下對問題也會了解得更清楚。某種意義上說就是尋求更高的一般性, 因為回過頭看, 這逼著你用最精要的工具。我們做問題, 有時候用了太多工具, 做了太多假設。這裡我們用最少的, 也只用最緊要 (本質!) 的。

豐: 你的意思是, 如果考慮更一般的情形, 比較容易找到論證的關鍵。

A: 確實, 這正是我的論點。這樣做技術上可能較困難, 因為要準確地導出這個關鍵性質, 別無選擇, 但是一旦找到了, 就有某些新的體會。

劉: 你提到 De Giorgi 給的定義, 一般來說很難界定一般性要一般到什麼程度。

A: 確實! 就像我說的這是非常困難的事, 可能只有極少數的數學家能有這樣的眼光, 像 Caccioppoli、De Giorgi。Caccioppoli 有一些讓人印象深刻的篇章段落, 你們知道他飽受批評說他常只做形式上的論述, 我們該如何看待這一類非常根本的問題: 不能將敘述化為現代標準下嚴謹的證明? 但在另一方面, 回頭去看 Caccioppoli, 人們從中了解許多東西。閱讀他的文章, 非常令人讚嘆, 因為他很清楚什麼方向好, 什麼路不通等等。他後半生就像 De Giorgi 一樣, 他有見地, 卻不在意其證明。有了正確的見地, 其它就不那麼重要了。以今人為例, 當代的 Gromov²⁴ 也有相同的風格, 他絕對有正確的想法, 正確的定義, 有時候, 也許他宣稱有了證明, 然而這些證明卻不真的完整。

豐: 你說的是誰?

A: Mikhail Gromov, 一位俄羅斯數學家。

劉: 有一次, Arnold²⁵ 在 Stanford 說:『我不知道 Gromov 如何得到那個結論, 他對如何證明連一點提示都沒有, 不過他總是對的。』

A: 正是這樣。所以, 嘗試把這些想法化為嚴謹證明的數學家們, 他們的工作也應該受到某種意義上的肯定。

²⁴ 譯註: Mikhail Leonidovich Gromov (1943-), 法籍俄裔數學家, 在幾何學方面貢獻卓著, 於 1993 年獲頒 Wolf Prize, 2009 年獲頒 Abel prize。

²⁵ 譯註: Vladimir Igorevich Arnold (1937-), 俄羅斯數學家, 最為人知的研究成果為 KAM theorem, 於 2001 年獲頒 Wolf Prize, 於 2008 年獲頒 Shaw Prize。

劉：我聽說偉大的義大利代數幾何學派也是如此，他們直觀很強。

A：是的，雖然這不是我的領域，但我聽人說起後來好多世代的代數幾何學家花了很多時間嘗試將這些前輩非正式、直觀的論述化為嚴謹的證明。

劉：我可以順著這方向再談些嗎？我們談到了義大利的數學家，你給了兩個例子，一個是代數幾何，一個是分析。義大利人一定有某些特殊的地方，你是否可以就這一點提出你的看法？當然，三次多項式是義大利人首先解決的。

A：我不知道，數學為什麼會在某個時間，在某個國家昌盛，這很難說清楚的，我只能說傳統上義大利的數學很強，從18世紀末、19世紀就是如此，我們有像 Dini²⁶、Vitali²⁷、Levi 等等的數學家，很奇怪的是在法西斯²⁸時期義大利被孤立，然而數學受到的影響卻很小。舉例來說，在看 De Giorgi 關於橢圓偏微分方程的文章時，我注意到分布理論 (theory of distribution) 被介紹到義大利來的時間比這些文章晚了許多，有段時間我們是與外界隔絕的。我覺得教育的傳統很重要，我們有許多歷史悠久的大學，當然這沒有說明為什麼數學在義大利蓬勃發展。

劉：我在甚麼地方讀到，文藝復興時期，有些城市以擁有某些數學上的發現為榮，例如我們這個城解出了三次多項式。

A：對，對，有數學爭辯與數學遊戲。典型的爭辯大概是這樣的，我們知道如何解這個方程，給你們6個月的時間找出答案，我們再公布我們的答案。

豐：在20世紀的20、30年代，數學在義大利真是蓬勃發達，是吧？當時在變分學、在代數幾何，你們都有極好的學派 (school)，還有，在微分幾何你們有 Levi Civita。不過你說受到法西斯黨人的影響？

A：我想我們是有些傷害，比如說，微分幾何的發展受到影響，一般來說與外界的聯繫不好，而同時期像法國這些國家則不然。

豐：談到你剛才提到的數學爭辯，記得我們訪談薩摩順吉²⁹(SATSUMA Junkichi) 時，他說在日本的某些廟裡會把數學題目寫在牆上讓學生想。

劉：是在神社裡，大部分是平面幾何的題目。

豐：所以那是某些文化上的基礎。

劉：就我所知，雖然後來日本數學承襲歐洲傳統，而不是來自日本傳統，然而孕育的土壤、基礎，已經準備好了，才能夠吸收歐洲傳統的數學。如果不是這樣，他們無法做到的。這證明科學

²⁶ 譯註：Ulisse Dini (1845-1918)，義大利數學家，Dini's theorem 便是以他的名字命名。

²⁷ 譯註：Giuseppe Vitali (1875-1932)，義大利數學家，Vitali convergence theorem 便是以他的名字命名。

²⁸ 譯註：指義大利於1922-1943年間在墨索里尼統治下所興起的獨裁主義政權，主張建立以超階級相標榜的極權主義統治。

²⁹ 譯註：薩摩順吉 (SATSUMA Junkichi, 1946-)，日本數學家，在可積系統、非線性波動、差分方程等領域有重要貢獻，其訪談文章詳見數學傳播第30卷第4期。

研究要慢慢來，記得豐哲常說我們不要倉促行事，文化的改變需要漫長的時間，急不來的。你對運輸最佳化的理論還是很感興趣？

A: 是的。

豐: 你在寫這個題材的書？

A: 已經寫了，2005年出版的。內容大部分是關於梯度流的理論，2008年出了第二版。

豐: 那裡出版的？

A: Birkhäuser³⁰。這一系列的書與蘇黎世的 NachDiplom (進階的研究生課程) 有關。教授這個課程的教師需要寫講義，我在2003受邀，不記得確切的年份 (按: 應是2001-2002年) 在那兒開一門課，再把內容寫成講義。這是一個機會可以對課程內容做更充分的記述，所以就演變成一本書。

劉: 義大利一般分析的情形如何？這是個籠統的問題，是 De Giorgi 聽到很可能會起反感的問題。

A: 我不清楚。我們目前因為人才流失，有點麻煩。我的意思是，當然我們有些非常好的數學家，即便是我下面這一代，在分析方面我們有 Alberti³¹、Bianchini、Malchiodi³²、Mingione³³ 和其他人等，但是在他們之後，我已經看到了難關。有些最好的人到國外去，所以，你看，現在不是很讓人興高采烈的時候了。也許從歐洲數學研究的前景著眼，這樣想或許好些。不過從國家的角度，目前不是好時刻，因為在流失中的是我們最有才華的人。

劉: 你剛剛說的，我有個例子，當 Alberto Bressan 移到賓州州立大學去的時候，我對他說，為什麼你不每年在 SISSA³⁴待上幾個月，但是他終究沒有，但在另一方面這也許反而有正面的事情發生，Bianchini 開始發展自己的方向，他告訴我現在有很好的學生，所以...

A: 不，不，事實上我指的是在 Scuola Normale 這樣的地方，比目前35歲或35歲到40歲之間的世代更年輕、有才華的科學家中，我看不到真正有名的人。由義大利教育出來的有名的學者大有人在，但是都在國外。Camillo De Lellis 在蘇黎世，他曾是我的學生；Alessio Figalli 在德州 (Texas) 也是我以前的學生。所以我察覺到有點困難，不僅是我自己的領域，環視數學分析的其它領域，都是有點艱困的時刻。

劉: 不過，底層的文化與傳統是如此長遠，如此深厚，我想這應該只是暫時的現象。

A: 是，希望如此，我希望這只是暫時的，因為這也牽涉到找人的困難，職缺少，以及找人的方式有待改善等等，第二代會上來，現在有在國外念博士的年輕世代，也許未來有機會讓他們回國。

³⁰ 譯註: 瑞士的出版公司。

³¹ 譯註: Giovanni Alberti, 義大利數學家, 現任教於 Università di Pisa。

³² 譯註: Andrea Malchiodi(1972-), 義大利數學家, 現任教於 SISSA, 曾於2006年獲頒 Caccioppoli Prize。

³³ 譯註: Giuseppe Mingione(1972-), 義大利數學家, 現任教於 University of Parma。

³⁴ 譯註: Scuola Internazionale Superiore di Studi avanzati/ International School for Advanced Studies。

劉：嗯，大家常談到俄羅斯的學派，當然他們現在情況很糟，可是在另一方面，他們還是培養出像 Grigori Perelman³⁵ 這樣的人才。

A：是個異數。

劉：但就如你前面所說，這都是因為個人的關係。

豐：是不是最好的學生都到 Scuola Normale，或是分散到其它學校？

A：沒有，我相信最好的學生還是到 Scuola Normale。

劉：我想問你有關 Scuola Normale Superiore 運作的問題，這是你所在的研究所，你們沒有大學部學生？

A：有。事實上這是我們和在 Trieste 的 SISSA 主要、也是真正不同的地方。我們有大學部學生。實際上，在我看來，Scuola Normale 最成功的是大學部的學程，而不是博士班學程。當然我們有非常好的博士生，然而博士班的成功是因為大部分的學生是我們大學部的畢業生，因此有機會在他們極其年輕的時候就開始對數學的探討。最新的例子就是 Figalli，現在 25 歲已是德州大學 Austin 分校的教授。大二的時候他來找我，我知曉他是真正特出的人才，花時間和他相處，大三那年送他出國，每件事都進展得很快，像是他只花了一年就拿到博士。Figalli 是個特出的例子，但是我還有其它好學生的例子。他們都做得很好，因為我早早讓他們接觸進階的數學研究。當然，如果沒有大學部學程，這是不可能的，這是為什麼 Scuola Normale 要保有大學部學程。年紀輕輕就能接觸到數學會議，到國外參訪等等。當然這只能用在極少部分的學生上，我不是說對所有的學生都如此，這樣做可能會毀了學生；對許多學生，他們需要依自己的步調成為好的數學家。總之，當你發現一個非常好的學生，這樣做非常有效率，這是非常有效率的做法。

劉：我非常感謝這些對話。你有很好的觀點和美好的故事，也許我們在此打住。謝謝你。

A：謝謝你們花時間做這段談話。

—本文訪問者劉太平任職中央研究院數學所，劉豐哲任教淡江大學數學系，整理者陳麗伍為中央研究院數學所助理—

³⁵譯註：Grigori Yakovlevich Perelman (1966-)，俄羅斯數學家，2006 年提出 Poincare conjecture 的證明，於 2006 年獲頒 Fields Medal，2010 年得到 The Millennium Prize Problems 獎。