關於圓系的幾個性質

潘振輝

在現行高中數學教材中，有關於圓系的定理及各種性質可能限於篇幅未給予較詳盡的說明，使教學過程進行總覺得不甚順利，如果學生提出如何確實諸性質，僅僅用例子來說明是不能滿足其好奇心。茲將各版本的教科書中有關於圓系性質，稍作整理如下:

平面上二圓

$$K_1: f_1(x,y)=x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$$

$$K_2: f_2(x,y)=x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$$

(1) $L: f_1(x,y)-f_2(x,y)$

$$=(d_1-d_2)x+(e_1=e_2)y+f_1-f_2=0$$

為 K_1 與 K_2 的根軸，卽 L 上任一點對 K_1K_2 的切線段等長

證:

$\forall p_0(x_0,y_0)\in L \Longrightarrow (d_1-d_2)x_0+(e_1-e_2)y_0+f_1-f_2=0$

p_0 對 K_1 的切線段長 $l_1=\sqrt{f_1(x_0,y_0)}$

p_0 對 K_2 的切線段長 $l_2=\sqrt{f_2(x_0,y_0)}$

則 $l_1{}^2-l_2{}^2=f_1(x_0,y_0)-f_2(x_0,y_0)$

$$=(d_1-d_2)x_0+(e_1-e_2)y_0+f_1-f_2=0.$$

$\therefore f_1=f_2$ 卽 L 上任一點對 K_1K_2 的線段等長

(2) $l,m\in \boldsymbol{R}, l^2+m^2\neq 0$. $T: lf_1(x,y)+mf_3(x,y)=0$ 為以 L 為根軸的尖軸圓系

證:

任取圓系 T 中二相異圓

$$c_1: l_1f_1(x,y)+m_1f_2(x,y)=0$$

$$c_2: l_2f_1(x,y)+m_2f_2(x,y)=0$$

則 c_1 與 c_2 的根軸為

$$\left(\frac{l_1d_1+m_1d_2}{l_1+m_1}-\frac{l_2f_1+m_2f_2}{l_2+m_2}\right)x$$

$$+\left(\frac{l_1e_1+m_1e_2}{l_1+m_1}+\frac{l_2e_1+m_2e_2}{l_2+m_2}\right)y$$

$$+\left(\frac{lf_1+m_1f_2}{l_1+m_1}-\frac{l_2f_1+m^2f_2}{l_2+m_2}\right)=0$$

即

$$\frac{(m_1l_2-m^2l_1)}{(l_1+m_1)(l_2+m_2)}$$
$$\times((d^2-d_1)x+(e_2-e_1)y+(f_2-f_1))=0$$

$\because$ $c_1\neq c_2\Longrightarrow l_1m_2\neq l_2m_1$

$$\Longrightarrow(d_2-d_1)x+(e_2-e_1)y+(f_2-f_1)=0$$

(i)當 K_1 與 K_2 相交於兩點 A、B 時，圓系 T 中每一圓均通過 A、B 且其圓心均在 K_1 與 K_2 的聯心線上。

證:

圓系 T 中任一圓

$C: lf_1(x,y)+mf_2(x,y)=0, l,m\in R,\ l+m\neq 0$

$\because A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)\in K_1\cap K_2$

則

$$f_1(x_1,y_1)=0, f_2(x_1,y_1)=0$$

且

$$f_1(x_2,y_2)=0, f_2(x_2,y_2)=0$$
$$\Longrightarrow lf_1(x_1,y_1)+mf_2(x_1,y_1)=0$$

且

$$lf_1(x_2,y_2)+mf_2(x_2,y_2)=0$$

可知圓 C 必通過 A、B 兩點。又 K_1 的圓心 $(-d_1/2, -e_1/2)$, K_2 的圓心 $(-d_2/2,-e_2/2)$, T 中任一圓 C 的圓心爲

$$\left(-\frac{ld_1+md_2}{2(l+m)}, -\frac{le_1+me_2}{2(l+m)}\right)$$

則

$$\begin{vmatrix} -\frac{d_1}{2} & -\frac{e_1}{2} & 1 \\ -\frac{d_2}{2} & -\frac{e_2}{2} & 1 \\ -\frac{ld_1+md_2}{2(l+m)} & -\frac{le_1+me_2}{2(l+m)} & 1 \end{vmatrix}=0$$

(ii)當 K_1 與 K_2 相切於 A 時，T 中任二圓相切於 A 且以根軸 L 爲一公切線。

證:

K_1 與 K_2 相切於 A 時，依上法可證得根軸 L 必通過 A 且與 K_1 K_2 的聯心線相垂直，則 L 爲 K_1 與 K_2 的公切線，又可證得 T 中任一圓過 A 且圓心在 K_1K_2 的聯心線上，故得證

(iii)當 $K_1\cap K_2=\phi$ 時，T 可能表一圓或一直線(根軸)或一點或 ϕ

證:

$T: lf_1(x,y)+mf_2(x,y)=0, l,m\in R\ \ l^2+m\neq 0$

①$l=-m$ 時，T 表一直線（根軸）

②$l\neq -m$ 時

$$T: x^2+y^2+\frac{ld_1+md_2}{l+m}x+\frac{le_1+me_2}{l+m}y+\frac{lt_1+mt_2}{l+m}=0$$

即 $$\left(x+\frac{ld_1+md_2}{2(l+m)}\right)^2+\left(y+\frac{le_1+me_2}{2(l+m)}\right)^2$$
$$=\frac{(ld_1+md_2)^2}{4(l+m)^2}+\frac{(le_1+me_2)^2}{4(l+m)^2}-\frac{lf_1+mf_2}{l+m}$$

令 $f(l,m)$

$$=\frac{(ld_1+md_2)^2}{4(l+m)^2}+\frac{(le_1+me_2)^2}{4(l+m)^2}-\frac{lf_1+mf_2}{l+m}$$
$$=\frac{1}{4(l+m)^2}[(d_1^2+e_1^2-4f_1)l^2+2(d_1d_2+e_1e_2$$
$$-2(f_1+f_2))lm+(d_2^2+e_2^2-4f_2)m^2]$$

$\because K_1$ 與 K_2 表二圓

$\Longrightarrow d_1^2+e_1^2-4f_1>0, d_2^2+e_2^2-4f_2>0$

判別式 $D=4[(d_1d_2+e_1e_2-2(f_1+f_2))^2$
$-4(d_1^2+e_1^2-4f_1)(d_2^2+e_2^2-4f_2)]$

取 K_1 與 K_2 相外離

$$\Longrightarrow\left(\frac{d_1}{2}-\frac{d_2}{2}\right)^2+\left(\frac{e_1}{2}-\frac{e_2}{2}\right)^2$$
$$\geq\left(\frac{\sqrt{d_1^2+e_1^2-4f_1}}{2}+\frac{\sqrt{d_2^2+e_2^2-4f_2}}{2}\right)^2$$
$$\Longrightarrow(d_1d_2+e_1e_2-2(f_1+f_2))^2$$
$$\geq(d_1^2+e_1^2-4f_1)(d_2^2+e_2^2-4f_2)$$

則 $D\geq 0$

$\Longrightarrow m/l$ 或 l/m 有二實數值 α,β 使 $f(l,m)=0$

可知 T 中可能表一點，（此即稱爲 K_1 與 K_2 的極限點）。

又 m/l 或 l/m 不爲實數值 α,β 時，則使 $f(l,m)>0$ 或 $f(l,m)<0$. 可知 T 中可能表一圓或 ϕ

③ 若二圓 K_1,K_2 的圓心分別爲 O_1,O_2，半徑分別爲 r_1,r_2 且相交於 A、B 二點

(i)K_1 與 K_2 正交

$$\Longleftrightarrow\overline{O_1A}^2+\overline{O_2A}^2=\overline{O_1O_2}^2\Longleftrightarrow r_1^2+r_2^2=\overline{O_1O_2}^2$$
$$\Longleftrightarrow d_1d_2+e_1e_2=2(f_1+f_2)$$

(ii)K_1 與 K_2 不同中心時，令 K_1、K_2 與均正交的一切圓形成一圓系 S_1，則 S_1 爲一共軸圓系，

令 $S_1: x^2+y^2+dx+ey+f=0$

與 K_1 正交 $\Longrightarrow dd_1+ee_1=2(f+f_1)$ —— (甲)

與 K_2 正交 $\Longrightarrow dd_1+ee_2=2(f+f_2)$ —— (乙)

①$d_1e_2-d_2e_1=0$

由 (甲) (乙)

$$\Longrightarrow f=\frac{f_1e_2-f_2e_1}{e_1-e_2},\ e_1\neq e_2(\because K_1, K_2\text{不同中心})$$

卽

$$S_1: x^2+y^2+dx+ey+\frac{f_1e_2-f_2e_1}{e_1-e_2}=0$$

S_1 中任二相異圓取爲

$$C': x^2+y^2+d'x+e'y+\frac{f_1e_2-f_2e_1}{e_1e_2}=0$$

$$C'': x^2+y^2+d''x+e''y+\frac{f_1e_2-f_2e_1}{e_1-e_2}=0$$

其根軸爲 $(d'-d'')x+(e'-e'')y=0$

但 C', C'' 均與 K_1 正交

$$\Longrightarrow d'd_1+e'e_1=2\left(\frac{f_1e_2-f_2e_1}{e_1-e_2}+f_1\right)$$

$$d''d_1+e''e_1=2\left(\frac{f_1e_2-f_2e_1}{e_1-e_2}+f_1\right)$$

卽 $(d'-d'')d_1+(e'-e'')e_1=0$

得根軸爲 $d_1x-e_1y=0$

②$d_1e_2-d_2e_1\neq 0$

$$\Longrightarrow d=\frac{2[f(e_2-e_1)+e_2f_1-e_1f_2]}{d_1e_2-d_2e_1}$$

$$e=\frac{2[f(d_1-d_2)+d_1f_2-d_2f_1]}{d_1e_2-d_2e_1}$$

卽

$$S_1: x^2+y^2+\frac{2[f(e_2-e_1)+e_2f_1-e_1f_2]}{d_1e_2-d_2e_1}x+\frac{2[f(d_1-d_2)+d_1f_2-d_2f_1]}{d_1e_2-e_2e_1}y+f=0$$

其中任二圓

$$C': x^2+y^2+\frac{2[f(e_2-e_1)+e_2f_1-e_1f_2]}{d_1e_2-d_2e_1}x+\frac{2[f(d_1-d_2)+d_1f_2-d_2f_1]}{d_1e_2-d_2e_1}y+f'=0$$

$$C'': x^2+y^2+\frac{2[f''(e_2-e_1)+e_2f_1-e_1f_2]}{d_1e_2-d_2e_1}x+\frac{2[f''(d_1-d_2)+d_1f_2-d_2f_1]}{d_1e_2-d_2e_1}y+f''=0$$

根軸爲

$$\frac{2(f'-f'')(e_2-e_1)}{d_1e_2-d_2e_1}x+\frac{2(f'-f'')(d_1-d_2)}{d_1e_2-d_2e_1}y+f'-f''=0$$

卽

$$2(e_2-e_1)x+2(d_1-d_2)y+(d_1e_2-d_2e_1)=0$$

由①②知 S_1 以 K_1、K_2 聯心線爲根軸之共軸圓系。

(iii) K_1 與 K_2 不同中心時，K_1 與 K_2 另成一共軸圓系 S_2，則 (ii) 中 S_1 中每一圓與 S_2 中每一圓均正交。

證

$$S_2: \alpha(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+\beta(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0,\ x, y\in \mathbf{R}\ \alpha+\beta\neq 0,$$

$$x^2+y^2+\frac{\alpha d_1+\beta d_2}{\alpha+\beta}x+\frac{\alpha e_1+\beta e_2}{\alpha+\beta}y+\frac{\alpha f_1+\beta f_2}{\alpha+\beta}=0$$

① $d_1e_2-d_2e_1=0$

$$S_1: x^2+y^2+dx+ey+\frac{f_1e_2-f_2e_1}{e_1-e_2}=0$$

$$\because\ d\cdot\frac{\alpha d_1+\beta d_2}{\alpha+\beta}+e\cdot\frac{\alpha e_1+\beta e_2}{\alpha+\beta}$$

$$=\frac{1}{\alpha+\beta}[\alpha(dd_1+ee_1)+\beta(dd_2+ee_2)]$$

$$=\frac{1}{\alpha+\beta}[\alpha\cdot 2(f+f_1)+\beta\cdot 2(f+f_2)]$$

$$=2\left(f+\frac{\alpha f_1+\beta f_2}{\alpha+\beta}\right)$$

② $d_1e_2-d_2e_1=0$

$$S_1: x^2+y^2+\frac{2[f(e_2-e_1)+e_2f_1-e_1f_2]}{d_1e_1-d_2e_1}x+\frac{2[f(d_1-d_2)+d_1f_2-d_2f_1]}{d_1e_2-d_2e_1}y+f=0$$

$$\because\ \frac{2[f(e_2-e_1)+e_2f_1-e_1f_2]}{d_1e_2-d_2e_1}\cdot\frac{\alpha d_1+\beta d_2}{\alpha+\beta}+\frac{2[f(d_1-d_2)+d_1f_2-d_2f_1]}{d_1e_2-d_2e_1}\cdot\frac{\alpha e_1+\beta e_2}{\alpha+\beta}$$

$$=\frac{2}{(d_1e_2-d_2e_1)(\alpha+\beta)}\times\{[f(e_2-e_1)+e_2f_1-e_1f_2](\alpha d_1+\beta d_2)+[f(d_1-d_2)+d_1f_2-d_2f_1](\alpha e_1+\beta e_2)\}$$

$$=\frac{2}{(d_1e_2-d_2e_1)(\alpha+\beta)}\times\{\alpha f(d_1e_2-e_1d_2)+\beta f(-d_2e_1+d_1e_2)+\alpha f_1(d_1e_2-d_2e_1)+\alpha f_2(-d_2e_1+d_1e_2)\}$$

$$=2\left(f+\frac{\alpha f_1+\beta f_2}{\alpha+\beta}\right)$$

由①，②知 S_1 中每一圓與 S_2 中每一圓均正交，此時 S_1 與 S_2 互稱爲共軸圓系。

(iv) 定點 $P(x_0, y_0)\in K_1$，過 P 且與 K_1 正交的每一圓必通過另一定點 Q，使得 O_1, P, Q 三點共線，

且 $\overline{O_1P}\cdot\overline{O_1Q}=r_1^2$，其中 r_1 表 K_1 的半徑，O_1 表 K_1 的中心。

證:

過 P 且與 K_1 正交的每一圓成共軸圓系 S_1，且其根軸爲 $\overleftrightarrow{OP}$，即 O,P,Q 共線。

$\because S_1$ 中每一圓與 K_1 正交，由切割線段長定理知 $\overline{O_1P}\cdot\overline{O_1Q}=r_1^2$

(v)給定一圓 K_0，與一個函數 $f:\boldsymbol{R}^2\longrightarrow\boldsymbol{R}^2$，若對平面上任一點 P 及對任一過 P 且與 K_0 正交的圓 K，恒有 $f(P)\in \boldsymbol{K}$（即 $f(P)$ 表一切圓 K 除 P 外的另一交點，則稱 f 爲對於圓 K_0 的圓鏡射。

取 $K_0: x^2+y^2=r^2$，且 $f:\boldsymbol{R}^2\longrightarrow\boldsymbol{R}^2$ 爲圓 K_0 鏡射。

$\forall p(a,b)\neq(0,0)$ 的 c_0 圓鏡射像點爲

$$f(p)=\left(\frac{r_0^2a}{a^2+b^2},\ \frac{r_0^2b}{a^2+b^2}\right)$$

$\because$ 0 表原點，$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=r_0^2\Longrightarrow\overline{OQ}=\dfrac{r_0^2}{\overline{OP}}$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{r_0^2}{\overline{OP}}\ \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{r_0^2}{\overrightarrow{OP}^2}\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{r_0^2}{a^2+b^2}[a,b]=\left[\frac{r_0a}{a^2+b^2},\ \frac{r_0b}{a^2+b^2}\right]$$

如此，我們對於圓鏡射的定義由來與圓正交性質間相關有比較明確的瞭解，更進一步在學球面上可研究圓正交及其映像的關係。

本文作者爲北一女中數學教師——編者按