三元一次聯立方程組的幾何解法討論

王 淑 霞

一、前言：

實驗本第一册對於三元一次聯立解的討論，一直令我很不滿意，總希望能對高一學生用他們能接受的方法去給個明確的交待，等到了解三元一次方程式的幾何意義，再以幾何觀點去討論。因此嘗試着把三元一次聯立方程組解的理論以代數方法討論出來。

二、預備常識：

(1) 一個方程組的解集可以用 1 個參數表出，則稱解集爲 1-dim（唸做 one dimension）即 1 個自由度。

例如:

$$\begin{cases} x=y \\ 2y=z \end{cases}$$

其解集可以表如$\{(t,t,2t)\mid t\in R\}$，則稱解集爲1-dim。

(2) 同(1)中，若一個方程組的解集可以用 2 個參數表出，則稱解集爲 2-dim 即 2 個自由度。例 $x+2y-z=3$ 的解集可表爲$\{(3-2u+t,u,t)\mid t,u\in R\}$，解集爲 2-dim。

(3)
$$\begin{cases} a_1\alpha+a_2\beta=a_3 & ① \\ b_1\alpha+b_2\beta=b_3 & ② \\ c_1\alpha+c_2\beta=c_3 & ③ \end{cases}$$

若知 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，則方程組有唯一解

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

證明: 由①，②

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \beta=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

故方程組有唯一解$\Longleftrightarrow$④中的 α β 代入③應滿足，即

$$c_1\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}+c_2\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}=c_3,$$

此式經化簡卽爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

三、代數討論：

三元一次聯立方程式:

$$*:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & ① \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & ② \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & ③ \end{cases}$$

根據解方程式原理: 代入消去法或加減消去法，現在擬用代入消去法，想挑出①,②,③中的適當的二式，把 x y z 三個變數挑適當的兩個當變數一個當常數，故很自然的要對(*) 式中的 x y z 的係數所排出的二階行列式去討論:

(Ⅰ) 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, ……

由 x y z 的係數所排出的二階行列式均爲 0，則

$$a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3=c_1:c_2:c_3$$

則

(i) 若 $a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3=c_1:c_2:c_3=d_1:d_2:d_3$

則 $\exists\lambda_1,\lambda_2$ 使得 ②=①$\times\lambda_1$，③=①$\times\lambda_2$，則 (*) 卽爲

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

此時 (*) 的解集卽如①式的解集，此解集卽爲 2-dim。

(ii) 若 $a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3=c_1:c_2:c_3\neq d_1:d_2:d_3$，則(*)無解。

(Ⅱ) 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$……，至少有一不為 0，不妨設為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

則選①，②式的 x y z 當變數，z 當常數，

$$\left.\begin{array}{l} \text{由①} \implies a_1x+b_1y=d_1-c_1z \\ \text{由②} \implies a_2x+b_2y=d_2-c_2z \end{array}\right\}(*)$$

$$\text{得}\quad x=\frac{\begin{vmatrix} d_1-c_1z & b_1 \\ d_2-c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1z \\ a_2 & d_2-c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

代入③:

$$a_3\frac{\begin{vmatrix} d_1-c_1z & b_1 \\ d_2-c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}+b_3\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1z \\ a_2 & d_2-c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}+c_3z=d_3.$$

化簡得

$$z\left[c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right]$$

$$=-a_3\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\implies \triangle\cdot z=\triangle_z$$

(式中 $\triangle=c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\triangle_z=-a_3\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ 見註 (1))

則 (1) $\triangle\neq 0 \iff z$ 有唯一解 $z=\dfrac{\triangle_z}{\triangle}$，代入 $(*_1)$，得

$$x=\frac{\triangle_x}{\triangle},\quad y=\frac{\triangle_z}{\triangle}。$$

(2) 若 $\triangle=0$，則

(i) 若 $\triangle_z\neq 0$，則 z 無解，當然原式無解。

(ii) 若 $\triangle_z=0$ (此時 $\triangle_y=\triangle_z=0$，理由見註(2))

則令 $z=t$，代入 $(*_1)$，得解集為

$$\left\{\left(\frac{\begin{vmatrix} d_1-c_1t & b_1 \\ d_1-c_2t & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1t \\ a_2 & d_2-c_2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},t\right)\middle|\, t\in \boldsymbol{R}\right\}$$

解集為 1-dim。

綜合：

(Ⅰ) $\triangle\neq 0 \iff *$ 有唯一解。

$$x=\frac{\triangle_x}{\triangle},\quad y=\frac{\triangle_y}{\triangle},\quad z=\frac{\triangle_z}{\triangle}。$$

(Ⅱ) $\triangle=0$，且 $\triangle$ 中有二階小行列式不為 0；

則(1)方程組有解 (解為 1-dim)

$$\iff \triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$$

(2)方程組無解 $\iff \triangle_x,\triangle_y,\triangle_z$ 至少有一不為 0。

(Ⅲ) $\triangle=0$ 且 $\triangle$ 中任一個二階小行列式均為 0，亦即

$$a_1: a_2: a_3=b_1: b_2: b_3=c_1: c_2: c_3$$

此時

$$\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$$

則方程組有解 (解為 2-dim)

$$\iff a_1: a_2: a_3:=b_1: b_2: b_3=c_1: c_2: c_3=d_1: d_2: d_3$$

方程組無解

$$\iff a_1: a_2: a_3=b_1: b_2: b_3=c_1: c_2: c_3\neq d_1: d_2$$

註 (1): 在這裏，不妨特別說明三階行列式這個符號就是為了簡化的需要而造的，畢竟一個數學符號並不是憑空而生的，是有其實際需要而造的，只是後來沒想到這個人工的代數符號居然還有幾何的意義。

註 (2): 在 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 時，

$\triangle=0$，$\triangle_z=0 \implies \triangle_x=\triangle_y=0$。

證明: $\because$ $\triangle=0$ 且 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，由預備常識

(iii) 知 $\exists\,\alpha,\beta$ 使

$$\alpha a_1+\beta a_2=a_3,\ \alpha b_1+\beta b_2=b_3,\ \alpha c_1+\beta c_2=c_3,$$

$$\triangle_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ \alpha a_1+\beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}(-\alpha d_1-\beta d_2+d_3)$$

$\triangle_x,\triangle_y$ 亦經化簡得

$$\triangle_x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}(-\alpha d_1-\beta d_2+d_3)$$

$$\triangle_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}(-\alpha d_1-\beta d_2+d_3)$$

$\because$ $\triangle_z=0$ 故 $\triangle_x=\triangle_y=0$。

註 (3): 由註(2)可知: 在 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ $\triangle=0$ 之下，欲知原式有解與否只要算 $\triangle_z$ 卽可。故上述的綜合(II)可改寫爲:

①′ 若 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$，則

(*) 的解爲 1-dim $\Longleftrightarrow$ $\triangle=0$，$\triangle_z=0$。

(*) 的解爲 ϕ $\Longleftrightarrow$ $\triangle=0$，$\triangle_z\neq 0$。

②′ 若 $\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\neq 0$，則

(*) 的解爲 1-dim $\Longleftrightarrow$ $\triangle=0$，$\triangle_x=0$

(*) 的解爲 ϕ $\Longleftrightarrow$ $\triangle=0$，$\triangle_x\neq 0$。

③′ 若 $\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\neq 0$，則

(*) 的解爲 1-dim $\Longleftrightarrow$ $\triangle=0$，$\triangle_y=0$。

(*) 的解爲 ϕ $\Longleftrightarrow$ $\triangle=0$，$\triangle_y\neq 0$。

習題:

1. $$\begin{cases}2x+y-z=1\\ x-y+2z=4\\ ax+by+cz=d\end{cases}$$

若解集爲 1-dim。則 $c=\alpha a+\beta b$, $d=\alpha a+\beta b$ 求 $\alpha,\beta,\overline{\alpha},\overline{\beta}$。

2. $$\begin{cases}5x+3y-z=0\\ 2x+y+3y=a\\ x+4y+bz=17\end{cases}$$

問 (i) 其解集可不可能爲 2-dim?

(ii) 若恰有一組解，則 a，b 有何限制?

(iii) 若不只一組解則 a，b 是多少?

(iv) 若無解，求 a，b。

3. $$\begin{cases}x+y+z=1\\ ax+by+cz=d\\ a'x+b'y+c'z=d'\end{cases}$$

若解集爲 2-dim，則 $a:b:c:d=?$ $a':b':c':d'=?$

4. 就 a 值討論

$$\begin{cases}(a-1)x+2y+3z=1\\ x+(a-2)y+4z=2\\ 2x+2y+3y=a-3\end{cases}$$ 的解集。

5. $$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=zd_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}\quad (*)$$

(1) $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，爲 (*) 有解的 ______ 條件。

(2) $\triangle=0,\triangle_x,\triangle_y,\triangle_z$ 至少有一不爲 0，爲 (*) 無解的 ______ 條件。

(3) $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，爲 (*) 的解集爲 1-dim 的 ______ 條件。

(4) $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，爲 (*) 的解集爲 2-dim 的 ______ 條件。

(5) $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，爲 (*) 無解的 ______ 條件。

註 (4): 高一同學等唸過第三册空間座標幾何之後，再繼續讀下段。

三、幾何討論：

先提醒:

(1) $ax+by+cz=d$ 之圖形爲平面，(a,b,c) 是平面的一個法向量。

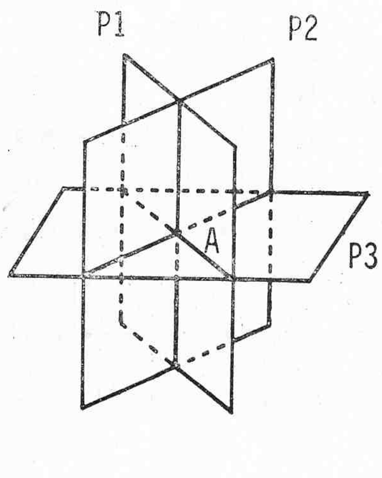
(2) 聯立式

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_2\ (P_1)\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\ (P_1)\end{cases}$$

之解集爲平面 P_1,P_2 之交線。

故三元一次三式聯立式的解集卽爲三平面的交集，玆依三平面的各種可能關係討論:

1. 交集爲一點:



三平面兩兩相交且共點 $\Longleftrightarrow$ $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ 兩兩不平行
(其中 $\vec{A}_1=(a_1,b_1,c_1)\,\vec{A}_2=(a_2,b_2,c_2)\ \vec{A}_3=(a_3,b_3,c_3)$)
且 P_1,P_2 之交線交 P_3 於一點。
$\Longleftrightarrow$ $\vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3$ 兩兩不平行且 P_1,P_2 之交線的方向數 即

$$\vec{A}_1\times\vec{A}_2=\left(\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\right)$$

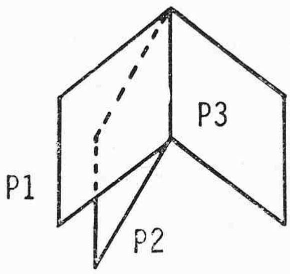
不垂直於 P_3 的法向量，即 $(\vec{A}_1\times\vec{A}_2)\cdot\vec{A}_3\neq 0$ 即

$$a_3\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0。$$

即 $\triangle\neq 0$。

2. 三平面交集為 1 線 (1-dim)

(i)

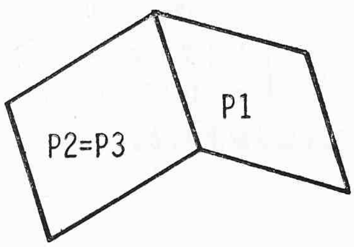


P_1,P_2,P_3 兩兩相交即 $\vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3$ 兩兩不平行；
但 P_1,P_2 之交線含於 P_3，即交線 L 之方程式（不妨設 $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0$）

$$x=\frac{\begin{vmatrix}d_1-c_1z&b_1\\d_2-c^{2}z&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1&d_1-c_1z\\a_2&d_2-c_2z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$$

代入 P_3 之方程式得 $\triangle\cdot z=\triangle_z$ 為恆等式
$\Longleftrightarrow$ $\triangle=0,\triangle_z=0$ (在 $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 之假設下)。

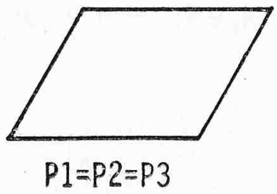
(ii)



P_2 與 P_3 重合但與 P_1 相交
$\Longleftrightarrow$ $a_2:b_2:c_2:d_2=a_3:b_3:c_3:d_3$
且 $\vec{A}_1\nparallel\vec{A}_2\parallel\vec{A}_3$，此時
$\triangle=0$，$\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$。

3. 三平面交集為 2-dim

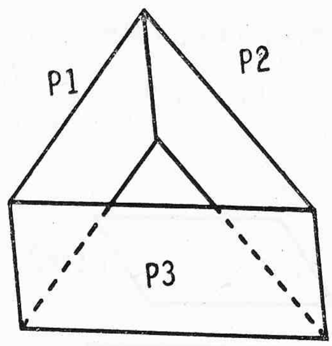
(i)



$P_1=P_2=P_3$
$\Longleftrightarrow$ $a_1:b_1:c_1:d_1=a_2:b_2:c_2:d_2=a_3:b_3:c_3:d_3$
此時 $\triangle=\triangle_y=\triangle_z=\triangle_x=0$.

4. 三平面交集為 ϕ

(i)

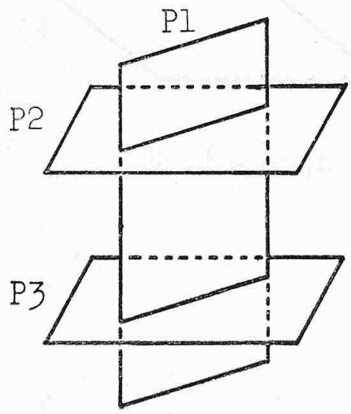


三平面兩兩相交，但 P_1,P_2 之交線 L 不在 P_3 上
$\Longleftrightarrow$ $\vec{A}_1,\vec{A}_2,\vec{A}_3$ 二二不平行，且 L 之方程式

$$x=\frac{\begin{vmatrix}d_1-c_1z&b_1\\d_2-c_3z&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1&d_1-c_1z\\a_2&d_2-c_2z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$$

(不妨設 $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0$) 代入③ 得 $\triangle\cdot z=\triangle_z$ 無解 $\Longleftrightarrow$ $\triangle=0,\triangle_z\neq 0$ (在 $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 之假設下)

(ii)



P_2 與 P_3 平行，即 $\vec{A}_2//\vec{A}_3$，$a_2:a_3=b_2:b_3=c_2:c_3\neq d_2:d_3$，$P_3$ 與 P_1，P_1 與 P_2 均相交，即 $\vec{A}_1\nparallel\vec{A}_3$，$\vec{A}_2\neq\vec{A}_1$，亦即 $\vec{P}_1,\vec{P}_2$ 之交線 L 之方程式

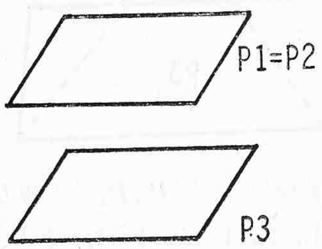
$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1-c_1z & b_1 \\ d_2-c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1z \\ a_2 & d_2-c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

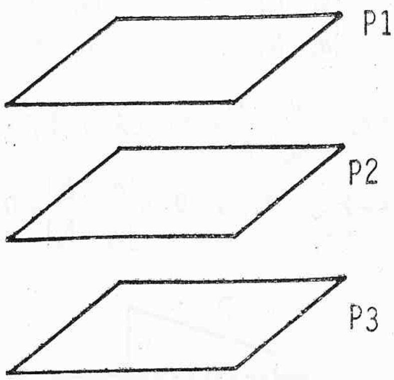
代入③得 $\triangle\cdot z=\triangle_z$ 無解

$\iff \triangle=0,\triangle_z\neq 0$（在 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 之下）

(iii)



或



$\iff \vec{A}_1=\vec{A}_2=\vec{A}_3$，但

$$a_1:b_1:c_1:d_1,\quad a_2:b_2:c_2:d_2,\quad a_3:b_3:c_3:d_3$$

至少有二不等，即

$$a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:o_3=c_1:c_2:c_3\neq d_1:d_2:d_3$$

註 (5)：請將上段的幾何討論與實驗本第三册之附錄比較一下，看看討論方法是否相同？

習題：1. 三平面

$$x+y-2z=1,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

之交集爲 2-dim，求 $a_i:b_i:c_i:d_i\ (i=1.2)$

2. 三平面

$$ax+2y-z=4,$$
$$-x+ay+2z=5,$$
$$x-2ay+z=6$$

的交集爲一點，一直線還是一平面還是 ϕ？試就 a 値討論。

3. 設三平面

$$E_1: 2x+y+3z=-1,$$
$$E_2: x+y+z-4=0,$$
$$E_3: 4x+2y+6z-7=0$$

則 (A) $E_1||E_4$ (B) $E_1||E_3$ (C) $E_1\perp E_2$ (D) $E_1\perp E_3$ (E) 三平面不共點

4. 求

$$\begin{cases} 4x+y+3z=11 \\ 8x+3y+6z=24 \\ 12x+4y+9z=35 \end{cases}$$

之解集並說明解集之幾何圖形如何？

5. 若

$$\begin{cases} 5x+3y-z=0 \\ 2x+y+3z=a \\ x+4y+bz=17 \end{cases}$$

三平面共線求 a，b。