高中生的困惑

—「機率到底是什麼？」

陸　思　明

○: 丟一個公正的硬幣，出正面的機率是多少?

□: 是 1/2。

○: 為什麼我有一回連丟了五次都沒有出正面?

□: 所謂機率是 1/2，並不保證每擲兩次就一定有一次是正面。它只是在你要擲而未擲之前，對擲出後的結果作一個事先的「合理預測」而已。

○: 既然我連擲 5 次都會有出 5 次反面的事實發生，那麼「出正面的機率＝ 1/2」的這個「預測」豈非既不合理，又無價值嗎?

□: 是的，這正是拉普拉斯的機率定義所招致的評議。

○: 假若這批評沒有錯，那你前面教給我們的機率知識豈不都是空話?

□: 不然！因為既指硬幣是「公正的」，這「公正」的潛在意義就含有「正反面出現的可能性一樣大」的意味。所以我們說「丟一個硬幣出現正面的機會(率)是1/2」是一個自然而合情理的想法。雖然這想法對你所作的三、五次實驗，可能預估的偏差很大，使我們對它的信心與價值蒙上了一層暗影。所幸有人並不灰心，居然將一枚

硬幣連擲了一萬次，紀錄擲到100次的時候，出現了**54**次正面；擲到 500 次的時候，出現了 **254** 次正面；擲到1000 次的時候，出現了 **501** 次正面，擲到 5000 次的時候，出現了 **2516** 次正面；擲到 10000次的時候，出現了 **4979** 次正面。（註一）

這一紀錄顯示，當我們實驗的次數n夠大的時候，出現正面的次數 r 與 n 之比「差不多」就是 1/2。雖不一定中，但相差絕不會遠！（你何妨也擲一百次試試看？）

因此拉普拉斯的機率定義在現實經驗中找到了較爲合理的解釋。當我們說「擲一枚硬幣出現正面的機率爲 1/2」的時候，應該解釋成「假定你將一枚硬幣擲了很多次，那麼出現正面的次數與你所擲的次數之比會很接近 1/2。」不應該解釋成：「每擲兩次，『一定』有一次出正面」或「擲一次正面之後，再擲『一定』出反面」或「10次中『必有』5 次出正面。」

○：經你這麼點明之後，使我對機率的涵意又多了一分理解。凡是「大量的」，「多次重複」出現的事件，利用機率所作估預的，常是切近事實而甚具決策價值的。

□：不錯！不過你不要走，我要同你打個賭！

○：同我打賭？

□：你剛才不是以您擲五回都沒有出現正面的經驗，來懷疑「出正面的機率=1/2」的合理性嗎？現在我出 20 元請您馬上把這枚鎳幣擲 5 回，假若都沒有出現正面這20元就是您的。假定不全是出反面，你只要倒賠我 10 元就行。怎麼樣，您願不願意賭？

○：不行，5 次連續擲出反面的機會太少了，我不能跟您這樣賭。

□：難道你一定會賭輸嗎？

○：雖然不一定輸，但贏的機會太少。

□：這就對了！可見我們說擲一枚硬幣的機率$=1/2$，並不是說不可能有 5 次連出反面的情形。只是說那種情形發生的可能性太少 ($1/2^5$) 而已矣！所以拉普拉斯的機率概念，在我們面臨抉擇時，仍然有助於我們作合理有利的考慮。因此你前面所學過的機率知識應該並非空話呢?!

問：假定有甲，乙兩位醫生，他們對某種病症的醫療紀錄是：甲醫生曾經治療過 100 個患有這種病的人，其中由他治好的有 85 個。乙醫生也治過 100 個這樣的患者，但他只治好了 68 個。萬一有一天你也患了這種病，你會優先去找那位醫生爲你治療？

答：當然我會選擇甲醫生，因爲他的治癒率顯然要比乙醫生高。

問：你所謂的「治癒率」是不是指『他治癒的人數』(85)與『他治過的人數』(100) 的那個比率？

答：是那個意思。

問：你是不是以爲「甲醫生一定能給你治好，而乙醫生一定不行」？

答：不是那麼意思！我只是根據紀錄，估計甲醫生給我治好的可能性大一點而已。

問：我不知道你現在所說的「治好的可能性」是不是跟你剛才說的「治癒率」是一回事？

答：可以說是一回事。

問：假定我把你所說的「治癒率」85/100，當成甲醫生能爲你「治癒的機率」，你是不是同意？

答：我看不出有什麼不可以的！

問：可是丙醫生只治過一個這種病人，正好也讓他給治癒啦，那你會不會認爲他的「治癒率」是百分之百？

答：雖然在形式上我們可以把1/1寫成100/100。但是我覺得只有一次治療紀錄而得出的治癒率，它的可信性太差。作爲預估的價值不高。

問：假若丙醫生治過 2 個病患呢？

答：當然比一個好一點，不過我還是覺得不可靠。

問：你的意思是說治療過的人數越多，所得到的那個「治癒率」也就越可信，對不對？

答：不錯，這正是我的看法。

問：爲什麼你認爲「越多，越可信」？是根據什麼理由？

答：有人說再有學問的人也經不起三問，我想我現在已經被你問住了！我實在說不出什麼理由，只是屢試不爽產生可信。直覺的認爲同一個結果重複出現的次數多了之後，我們的猜測與估計才比較可信。現在我要反問你一句，難道你不認爲「越多越可信」嗎？（註二）

上面的兩段問答，有助於我們瞭解經驗機率的涵義。

先說**相對次數**

譬如(i)甲醫生治療病人 100 人，治好了其中 95 人。我們把

$$\left(\frac{(\text{治好的人數})}{(\text{治療的總人數})}\right)\text{即 }\frac{95}{100}$$

叫做甲醫生治療病人的「**相對次數**」。

(ii)阿呆從高一到高三參加數學測驗 30 次，其中有 5 次超過90分。（可見阿呆不呆）。我們說他的數學成績超過 90 分的**相對次數是**5/30。

(iii)某球員於中正杯決賽中，出手 20 次，只進了五

個球。我們說這場比賽他進球的「相對次數」是 5/20。

(iv)林婦產科上月一共接生了五十八個嬰兒，其中有27個是女嬰（好現象！），我們說該醫院上月份女嬰出生的相對次數是 27/58。

(v)有人計算：從1600年到2000年，這400年內總共有 4800 個十三號（每月的第十三日）。它們分配在一星期七天內的日數如下表：

星　期	日	一	二	三	四	五	六
是十三號的次數	687	685	685	687	684	688	684

（註三）

在這個統計中，我們說「13號為星期五」的相對次數是 688/4800。

一般地說：在 n 次重覆的獨立試驗中，某事件 A 發生的次數若以 $|A|$ 表示，則 $|A|/n$ 叫做事件 A 的相對次數並用 f_A 來表示。即

$$f_A=\frac{|A|}{n}$$

註；在東華本中以m表重複試驗的次數。以 m_A 表事件A在m次試驗中出現的次數。那麼 $f_A=\frac{m_A}{m}$

通常我們有意無意地把一事件的「相對次數」就當成了它的「機率」。譬如前面從 (i) 到 (v) 的例子中，我們會以為 (i) 甲醫生治癒一個病人的機率是 95/100 (ii) 阿呆參加數學測驗時，他能考過 90 分的機率是5/30。(iii) 某球員出手命中的機率是 5/20 (iv) 若張太太在林婦產科分娩，我們會預測他生男孩的機率是 (1−27/58) (v) 根據那個統計表，我們會認為十三號正好是星期五的機率是688/4800，而且它是最大。所以假定你沒看過日曆，而要你猜「下個月的十三號是星期幾？」的話，顯然你應該猜「星期五」才是最有利。

但是在試驗的次數很少的情形下，把相對次數當成機率是很離譜的。譬如李太太生了兩個孩子，都是女孩；我們就說李太太「生女」的機率是100%豈非輕率荒謬？假若你根據這個相對次數來「鐵口直斷」李太太生男無望，那不要冤死她嗎？

所以只有當試驗的次數 n「夠大」的時候。把相對次數當機率看才「夠意思」。我們可以這樣說，假想某事件 A 發生的機率是 p。那麼在大量的，多次的試驗中，該事件 A 發生的相對次數會「穩定地」接近於 p。換句話說，試驗次數 n 之增大，會使「相對次數」成為「機率」的良好近似值。（n 愈大，這個近似值愈可取。）

因此，在 1920 年左右，數學家(R. Von Mises)〔註：黃提源教授譯為洪密斜斯・東華本用此名〕，提出了他的機率觀點：

設事件 A 在 n 試驗中發生的相對次數為 $|A|/n$ 則事件 A 發生的機率 $P(A)$ 可視為 n 趨近於無窮大時相對次數 $|A|/n$ 的極限值。用式子表示，就是

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}|A|/n$$

因為 $\lim_{n\to\infty}|A|/n$ 所表的機率中，兩個數據 $|A|$ 與 n 都是由統計而得來的，所以洪密斜斯定義的機率也叫作「統計機率」。又因統計的對象是長期的大量的經驗或實驗。所以這機率又有人把它叫作「經驗機率」或「實驗機率」。

阿彩想找阿智搭訕。就問：『阿智，你看洪密斜斯給機率下的這個定義好不好？』阿智說：『一個數學家在定義一個概念的時候，必定經過長時間的深思熟慮與字斟句酌而後形成的。現在妳居然要叫我這「高中小子」對它的好壞發表議論，豈不要折煞我哉？』阿彩把頭一甩，似氣非氣地說『哎呀，這兒又沒有別人，講話何必這麼「端」兮兮的?!』阿智說：『既然妳這麼問我，一定是妳心裏有話要說，妳何妨先告訴我妳對洪密斜斯的定義有何看法？』阿彩：『我呀我覺得他的定義是廢話一句！』（她說完之後故意把嘴吧往上一翹）阿智說：『你別信口雌黃好不好！』，阿彩把臉逼近了阿智，說：『我問你，誰能夠把一個實驗重複進行到「無限次」？』，阿智被問得心頭一愣，呆了一下只好說：『吾人「生也有涯」，當然作「無限次」實驗是不可能的。』阿彩得理不讓人：『既然如此，那洪密斜斯用 $\lim_{n\to\infty}|A|/n$ 來定義事件 A 的機率，說得好聽一點是「空中樓閣」，說得難聽一點不就是廢話一句是什麼？』阿智被問得滿頭霧水，張口結舌不知該如何答對。

高明的看官，請你出面為阿智打打圓場吧！你看他好可憐噢!!

（註一）：見普通數學教程（楊維哲蔡聰明教授編著）第 548 頁附表。

（註二）：問答雙方都是剛接觸到機率的高中學生。顯然還沒有學過伯努利大數法則，所以只能有常識性的直覺看法，而無法提出進一步的論證。

（註三）：見機率論（黃提源教授著）第 14 頁。