談數學思考的指導方法

葉 東 進

前 言

在數學的教學中，沒有教師能因單單仰賴教科書而達到教學的理想，這意思是說：書本是死的，教師才是活的，教師須將個人的智慧溶入他的教材中，適當地引發學生學習的動機，教學才可能生動，學習才可能達到效果。教師所要帶給學生的不止是知識上的堆砌與形式上的邏輯推演，更重要的是培養他們能夠掌握基本的思考方法以及看透數學形式中所蘊涵的實質內容。如果教師僅是直陳所欲講授的內容，而少利用旁敲側擊的點滴方式讓學生從觀察實驗、自動參與中逐步歸納，掌握方向，邁向目標，那麼學生的學習將止於被動的吸收而非主動的探究，學生因此難得嚐到發現的滋味固不用說，便是消化都覺不良。另外，數學的抽象形式有其必要，但無法了然於形式的始末，也就是說看不清這個抽象的來源，學習便陷於徒有形式而乏直覺，沒有直覺的基礎或是直覺的疲弱，便大大地減低了思考的能力。思考能力的培養，往往在數學方法的展示中領會而得，因此，身爲教師者，如何憑其個人智慧，在最恰當的時機，引入了某種數學方法，以讓學生從中領悟便是一件極其重要的事情。

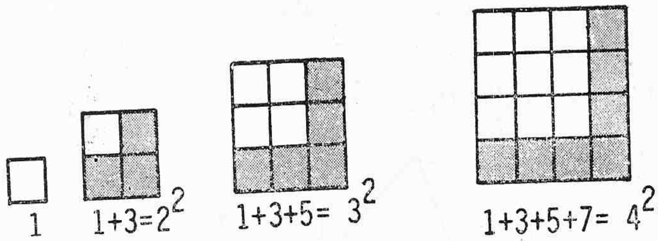
以下試着用一些例子來說明個人以爲在演習或思考中常被用到的一些數學方法：歸納聯想、分析、直觀、與以簡御繁。

本　　文

一、歸納聯想

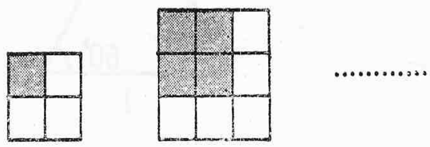
遇到這樣的問題：證明對任意自然數 n，恆有 $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$，如果教師只是要求學生利用數學歸納法證出這個式子，而不問此式的來源，那麼證明將顯得沒多大意義，教師是否該問學生：怎麼會有這個式子的？ $1+3+5\cdots\cdots+(2n-1)$ 與 n^2 是如何被聯想在一起的？一個直覺而有益於學生的教法是：

讓他們試驗觀察下列的圖示：



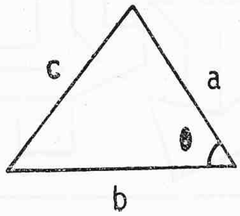
從圖示中，讓學生自己發現可能的規則。想想，訓練他們從觀察中找出可能的規則，難道不比訓練他們會證明這個規則重要嗎？

某些學生也許會從 $1+2+3\cdots\cdots+n=n^2+n/2$ 這個已知式子中聯想到 $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$ 與 n^2 的可能關係這樣的聯想確值讚許，教師甚至可以進一步讓學生從上列的圖示中找出 $2^2-1^2=3$，$-2^2=5\cdots\cdots$，$n^2-(n-1)^2=2n-1$。



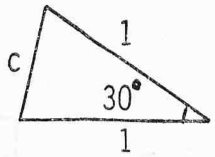
並聯想到要是從 $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ 式中是否可解決出什麼樣的問題來？（譬如 $1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2$ 的求和計算）要是學生接着又想到 $n^4-(n-1)^4=\cdots\cdots$ 的更高次情況，那麼聯想便已成功，學生慢慢地嚐到了發現的滋味，其思維，並已從實際的平面漸漸地進入抽象的高維情況了。

讓我們再看一個例子：

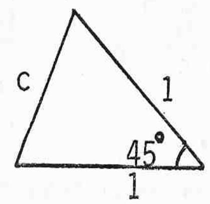


上圖中的三角形，學生從幾何經驗中知道，當 $\theta=90°$ 時，a、b、c 就有一個關係：$c^2=a^2+b^2$，現在我們問：如果 θ 不是 $90°$，而是一個其他的定角（譬如說 $\theta=45°$），那麼 a、b、c 是否也有一個關係存在？這個答案顯然是肯定的，那麼推想當 θ 是一個一般角時，a、b、c 與 θ 之間當然也有一個關係存在，那麼這關係爲何？假設我們的目標是要介紹這個關係（餘弦定律），但不是由老師卽刻說出它的結論，而是讓學生自己去觀察、去尋找，教師只是從旁輔導，那麼該怎麼做？作教師的可以提醒學生，要他們不妨把 a，b 暫時當作定長，讓 θ 作爲變數，學生將因此領會到一點：卽 c 的長度將受 θ 的變動的影響，卽是說 c 是 θ 的一個函數 $c=f(\theta)$，尋求這個函數便在尋求前述的那個關係，那麼如何尋找到這個函數呢？是不是要讓學生試着從 $\theta=30°$、$45°$、$60°$、$90°$、$120°$ 等諸特例中去尋找可能的方法？不妨取 $a=b=1$

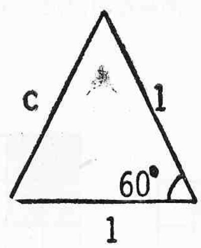
(1) 當 $\theta=30°$ 時，要求學生計算出 c 的長：



(2) 當 $\theta=45°$ 時，要求學生計算出 c 的長：

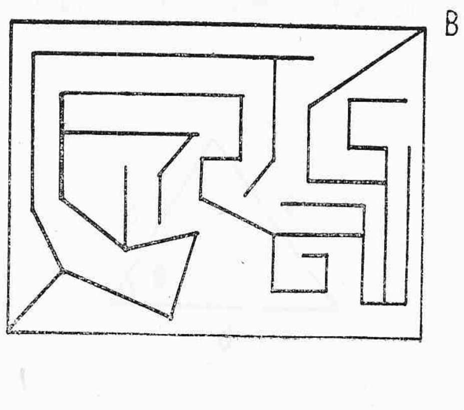


(3) 當 $\theta=60°$ 時，要求學生計算出 c 的長：



等等，學生將從這些問題的演練中領會出尋求 c、a，b 與 θ 的關係的一個方法了。

二、分　　析



小時候，我們都有玩過在紙上「走迷宮」的遊戲：經驗告訴我們，從A走，到達B，往往要嚐試許多的錯誤，如果從B倒走回到A，便顯的較簡單又迅速，並因而清楚地找出從A到B的路線。這兩種走法的差異在於前者中，我們只是不斷的摸索，看不清目標，只能從嚐試錯誤中不斷地改正而尋得正確的路線，至於後者目的（目標）已掌握在我們手中，能較清楚地看出路線的正確與否。後者對於數學的教學是不是給予我們深刻的提示呢？

數學從某一角度看，卽在尋求因果關係，譬如某一定理、某一問題，總有某些已知條件（因），以導出某些結果。對於初學的人來說，要試着從（因）中尋出一條路線到達（果）往往是困難的，困難的累積常造成學習者的挫折感，是否我們可以教導他們如何從（果）中去分析它與（因）的關係？試舉二例：

1. 設a，b爲實數，證明 $|a+b|\leq|a|+|b|$，並問式中的＝號成立時，a、b應滿足何條件？

$$
\begin{aligned}
& |a+b|\leq|a|+|b| \\
\Longleftrightarrow\ & |a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2 \\
\Longleftrightarrow\ & (a+b)^2\leq a^2+b^2+2|ab| \\
\Longleftrightarrow\ & ab\leq|ab|
\end{aligned}
$$

最後一式明顯地正確，因此原式 $|a+b|\leq|a|+|b|$ 便也正確。

另外，上列中，看出 $|a+b|=|a|+|b| \Longleftrightarrow ab=|ab| \Longleftrightarrow ab\geq o$

上述的方法便是將所欲證的果── $|a+b|\leq|a|+|b|$，先掌握在手中，拿着它來簡化、來分析，知道它只是 $ab=|ab|$ 這一明顯事實的另一種形式而已。這方法斷不會使學生在問題的處理中迷失了方向。

2. 設 a、b、$c\geq o$，證明 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

有一種證法是：

$$
\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab},\ \frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc},\ \frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ca}
$$

$$
\Longrightarrow\ \frac{(a+b)}{2}\cdot\frac{(b+c)}{2}\cdot\frac{(c+a)}{2}\geq\sqrt{a^2b^2c^2}
$$

$$
\Longrightarrow\ (a+b)\ \ (b+c)\ \ (c+a)\ \geq 8abc
$$

無可否認，此法相當簡潔，但對一位初學的人來說，把欲證的式子跟 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 扯上關係幾乎是困難的。讓我們倒果爲因分析一番如何？

$$
\begin{aligned}
& (a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc \\
\Longleftrightarrow\ & a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\geq 6abc \\
\Longleftrightarrow\ & a\,(b^2+c^2-2bc)+b\,(c^2+a^2-2ca)+c\,(a^2+b^2-2ab)\geq o \\
\Longleftrightarrow\ & a\,(b-c)^2+b\,(c-a)^2+c\,(a-b)^2\geq o,
\end{aligned}
$$

最後一式明顯地正確，因此原式便也正確。

三、直　　觀

數學經由符號的表示，顯示出抽象的形式，但在形式的背後卻有其直觀上的涵義。在教學上，適度地利用直觀常能使學生更淸楚所學的內容，有助於他們在問題的思考中找到明晰的思路，舉例如下：

1. 絕對值的幾何意義：

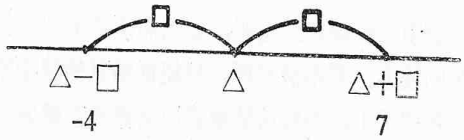
設X爲實數，$|X|$乃表數線線上點X至原點O的距離

設 X_1, X_2 爲實數，$|X_1-X_1|$ 乃表線上點 X_1, X_2 間的距離

設 X_1, X_2 爲複數，$|X_1, X_2|$乃表平面上兩點 X_1, X_2 間的距離

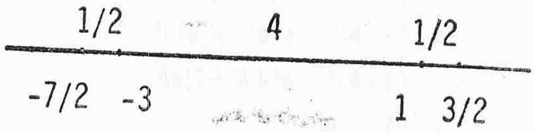
例如：化 $-4\leq X\leq 7$ 爲$|X-\triangle|\leq\square$的形式

先考慮 $|X-\triangle|\leq\square$ 此式的直觀意義乃是在線上找到點$\triangle$，使動點X到$\triangle$之距離不大於$\square$，圖解之卽爲



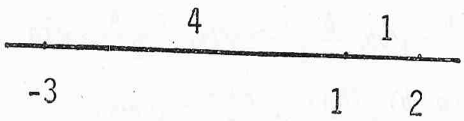
明顯看出$\triangle=\dfrac{3}{2}$，$\square=\dfrac{11}{2}$

又例：解方程式 $|X-1|+|X+3|=5$，直觀意義便在尋找線上的點X使其到1，−3之距離和爲5，圖解之



明顯看出這樣的X有兩個$\dfrac{3}{2}$與$-\dfrac{7}{2}$

再例：設X爲實數，求 $|X-1|+|X-2|+|X+3|$ 的最小值，直觀上乃是在線上找到某一點使其至點−3、1、2之距離和最小，從下圖中馬上看出，當取$X=1$時，距離和爲最小(5)。



2. 線性代數上所謂 n 個向量線性無關的極抽象的定義：若實數 α_1、α_2……、α_n 滿足 $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots\cdots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$時，必有 $\alpha_1=\alpha_2\cdots\cdots=\alpha_n=0$的話，稱 $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots\cdots,\bar{a}_n$ 爲線性無關。這個定義實在抽象，如果缺乏某些直觀的涵義作基礎，那麼研讀線性代數將陷入極抽象的形式痛苦中。
考慮$n=2$時，這定義在平面上的情形，便是說 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 不共線。（當 $\vec{a}_1,\vec{a}_2\neq\vec{0}$時）
考慮$n=3$時，這定義在空間中的情形，便是說 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 不共面。（當 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\neq\vec{0}$時）
有了上述兩種幾何直觀作基礎，就易於瞭解原先定義的內容爲何以那麼抽象的形式展現了，因爲當 $n\geq 4$ 時，已無幾何直觀上的意義了，便只有其代數的抽象形式，而這抽象形式乃源自於$n=2$、3時的代數形式的共同特徵。

四、以簡御繁

有次上課，講到「函數」這個觀念，提及了這個例子：

寄一封航空的郵資是由該信的重量而定，亦卽「般空信的郵資」是「重量」的函數，如以x表示重量（以公分計），以y表示郵資（以元計），則從臺灣到歐、美、非的「航空信郵資函數」$y=f(x)$ 如下：

$y=8$，　　當$0<x\leq 10$時

$y=8+8$，當$10<x\leq 20$時

……………………………………

$y=8+n\cdot 8$，當$n\cdot 10<x\leq(n+1)\cdot 10$時

我所做的第一件是讓學生試着在平面上畫出這個函數的圖形（圖一）；

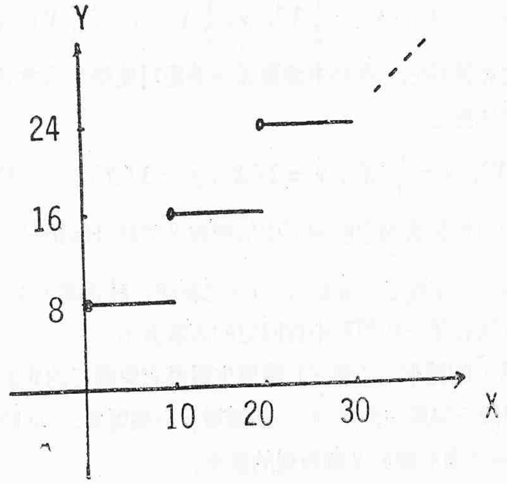


圖 一

由圖形中，讓學生直覺到它的遞增與階梯性。

接着我提醒學生：上述的函數表示：$y=(n+1)\cdot 8$，當 $n\cdot 10<x\leq(n+1)\cdot 10$，顯然沒有把變數$X$與倚變數$y$的直接關係寫出來，是否可設法找出它們（$x$與$y$）關係的直接形式？（引起動機）（註）在學生的凝疑中，我引進了高斯符號〔X〕這個觀念：每一個實數X均有其整數部分與小數部分，一個實數X去其小數部分，所餘之整數部分記爲〔X〕，例如 $\sqrt{2}=1+0.414\cdots\cdots$，$8=8+0\cdots\cdots$，$-2.3=-3+0.7\cdots\cdots$所以$[\sqrt{2}]=1, [8]=8, [-2.3]=-3$ 等，並介紹了函數 $y=[X]$ 的圖形（圖二）：

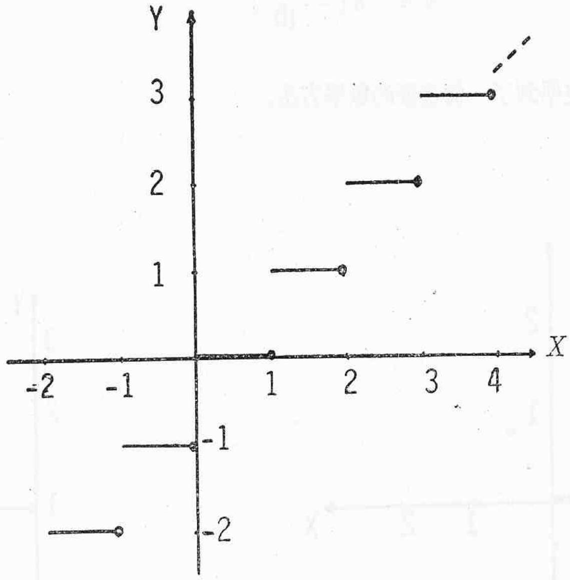


圖 二

下一步，我要學生觀察圖一與圖二；他們看出了兩個圖形有着某種類似（遞增、階梯狀），但又有着相異處（左、右端點的不連續，y值跳升的幅距，X變動的單位差距等）。此時我趁機提出了一個重要的數學方法：模式的建立與逼近的描寫。我告訴學生，如果以圖二的函數作爲基本模式，是否能用它來逼近圖一的函數，而找到圖一函數的直接形式？以下是我在課堂上引導學生逐步發展的步驟與過程：

(i) 考慮$y=[2X]$, $y=[3X]$, $y=[\frac{1}{2}X]$, $y[\frac{1}{2}X]$, $y=[\frac{2}{3}X]$ 等諸函數的圖形。讓學生了解X的係數是如何地影響到它的圖形中變數X的差距?!使學生領會到圖一函數X變動差距如何以X的係數的多少來掌握它。

(ii) 其次考慮$y=\frac{1}{2}[X]$, $y=\frac{1}{3}[X]$, $y=2[X]$, $y=3[X]$, ……等諸函數的圖形。讓學生了解$[X]$前的係數是如何地影響到它的圖形中倚變數y的跳升幅距只使學生領會到圖一函數y值的跳升應以係數的多少來掌握它, 並綜合(i)之結論,練習諸如$y=3[\frac{1}{2}X]$, $y=\frac{1}{2}[3X]$ 這種形態的作圖,也試着從一些圖形中找回它的函數表示。

(iii) 考慮函數$y=[-X]$ 的圖形,(圖三)讓學生觀察它與圖二的異處(左、右端點的不連續),並試着讓學生找出圖三與圖一的異同(一個遞增、一個遞減。)此時,趁機順便介紹$y=f(X)$與$y=f(-X)$ 兩者圖形關於y軸對稱的觀念。

(iv) 考慮函數 $y=-[-X)$ 的圖形,並使之與 $y=[X]$ 的圖形(圖二)比較,趁機引進了一般 $y=f(X)$ 與 $y-f(X)$ 兩者圖形關於X軸對稱的觀念。又讓學生考慮 $y=-[-X]$ 的圖形(圖四)並使之與圖一比較,學生已經看出圖四已經非常逼近了圖一,所差的只是X變動差距,y值跳升的幅距而已,利用前述(i)與(ii)的結論來修正X變動差距與y值跳升幅距,學生一步步地找到了圖一函數的代數表示為:

$$y=-8[-\frac{X}{10}]$$

前述的發展過程看似繁瑣,卻極自然,尤其是對稱觀念的適時引進及利用基本模式逼近描寫,充分展現了數學發展的一般形態。學生在過程中得到的,不只是最後一式

$$y=-8[-\frac{X}{10}]$$

更值得的是他學到了一個重要的數學方法。

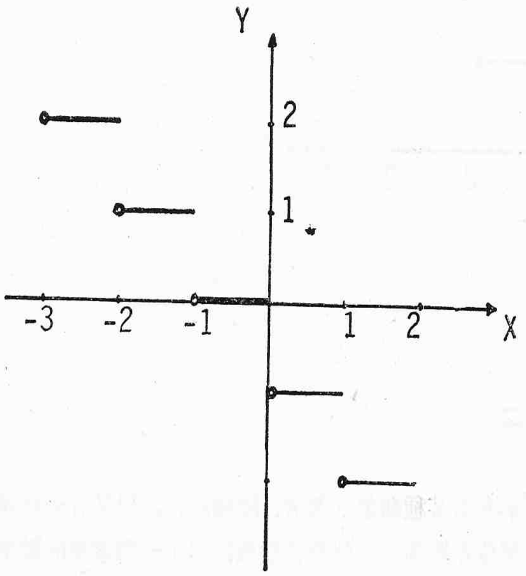


圖 三

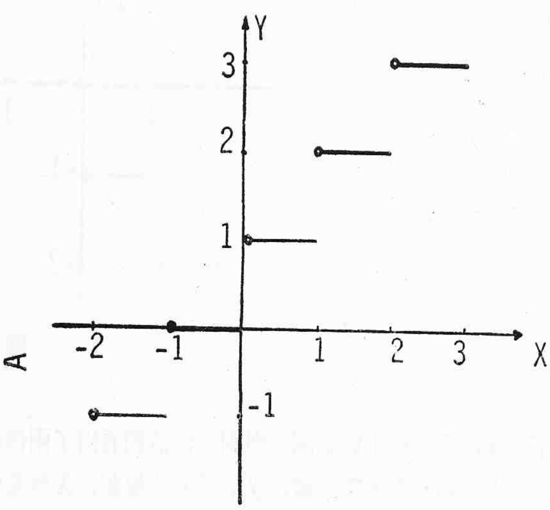


圖 四

註：雖然要達到 $y=-8\left[-\frac{X}{10}\right]$ 可以取捷徑：

由 $$n10<X\leq(n+1)10\Longrightarrow n<\frac{X}{10}\leq n+1$$

$$\Longrightarrow -(n+1)\leq-\frac{X}{10}<-n\Longrightarrow\left[-\frac{X}{10}\right]=-(n+1)$$

由 $$y=(n+1)8\rightarrow y=-8\left[-\frac{X}{10}\right]$$

但這樣子的介紹難免陷於形式的堆砌而使學生看不清問題的方向。這種介紹法，可以在學生瞭解前述發展的方法之後再予以提出，兩相比較，讓學生更覺有趣。

結　論

以上所舉例子，只是個人用以說明數學方法的如何運用。方法的運用因着教師的個別差異而有巧妙不同，提出來只是想拋磚引玉，希望藉着交流與不斷的討論，使教師們得着互惠，使教學更趨理想。相信有許多優秀的老師，在各個地方，運用不同的方法，默默耕耘。相信這些教師有着一個共同的看法，即是一位有心的教師，他所能做的絕不是在玩弄數學的形式，賣弄解題技巧的而徒讓學生迷失；而是要指出方向，提供方法，從旁引導，讓學生有信心試着自己達到他的目標。