對數與約翰·納皮爾 (John Napier)

賴漢卿

對數這個名詞，對國中、高中的同學來說都不會陌生，因爲他們要學常用對數。進到大學上微積分時，以 e 爲底的指數與對數函數更具基本的重要性。我上課，每次說到這裏總要簡單提一提有關對數的故事，以引起學生的興趣。今年我上微積分課時，學生提議將這些故事寫出來好讓較多的學生分享此故事。寫與講稍有不同，蓋寫出來總得要有系統及根據，講則可以較不嚴格，然應學生的希望，乃花些工夫做個報導。

今天我們所用所講的對數爲常用對數或自然對數，與最早 Napier 的對數稍有出入，唯其來源的精神及其性質可說來自 Napier，祇是形式不同而已。現在就來介紹 Napier 其人及其發明之對數法則。

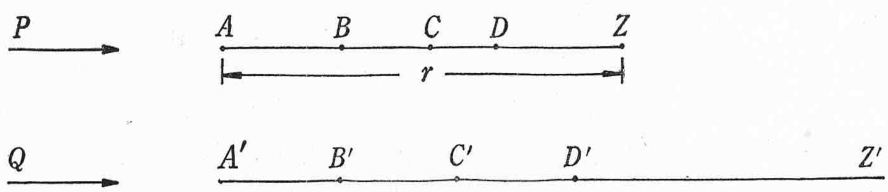
我們知道當一個人想計算大數之積與商時，都常利用對數方法，求其近似值。其起源可遠溯 Kepler (1571-1630) 研究天體運動學時他遇到許多非常大的數值計算，但他要求的是有效的近似值，因之乃尋求簡單的計算方法。當時在蘇格蘭恰好出了一本書

"Mirifici logarithmorum Canonis descriptio, seu……,
auctore ac inventore Joanne Nepero barone Merchistonii"
(驚動人的對數規則與記述，卽……
著者兼發明者 John Napier, Merchistonii)

這是 1614 年的事，傳說著者 Napier 在 1550 年出生於蘇格蘭的一小市鎭，Napier 原先是長老敎會的修道士，他認爲對人類最大的奉獻是傳授其敎義之精神。這個非數學家的 Napier，爲什麼着手研究發明對數呢？詳情不得而知，或許他常聽到有人爲龐大的數值計算而感到苦惱，尤其是商，積之計算，因此引起了他推敲是否有簡單的計算方法。大概因之而發現他的對數法則吧!

Napier首先所推考的是將大數的積或商的近似值計算，轉變成和或差的演算。於是由積與和的對應，注意到等比級數與等差級數的對應，但怎樣的等比級數對應怎樣的等差級數乃是個問題，這就是在Napier的創意中的關鍵。

Napier 最先考慮沿直線運動的兩點 P, Q。P是在定長 AZ 之始點A到終點Z的運動。點 Q 則無限制地從直線 $A'Z'$ 之始點 A' 點向 Z' 方向做運動，P, Q 以同速出發。點Q以等速運動，點P之速度由



此點到Z的距離來決定，做減速運動。如點P在B點時，Q在 B'，此時就稱

「$A'B'$ 爲 AB 的對數」。

這就是「Napier 對數」的基本定義。僅就此定義，則尙無法出現「Napier 對數」的性質。爲示明其性

質，乃取 AZ 長爲 r,r 可以爲很大的值。在點A的P之速度爲r。P,Q 從A，A' 出發，經過時間 $1/r$ 時，P,Q 分別抵達 B,B'。當r非常大時，$1/r$ 等於瞬間的短時間。此時P到B的距離等於 $r\times(1/r)=1$，Q到 B' 的距離也等於 1。今P在點B的速度等於 BZ 的長，即

$$BZ=r-1=r\left(1-\frac{1}{r}\right)$$

故在時間$\frac{1}{r}$內，點P到達C，點Q到達 C'，則

$$BC=\frac{1}{r}\cdot r\left(1-\frac{1}{r}\right)=1-\frac{1}{r},\qquad B'C'=\frac{1}{r}\cdot r=1$$

於是

$$CZ=AZ-AB-BC=r\left(1-\frac{1}{r}\right)^2$$

又再經 $1/r$ 時間Q到 D' 點，則 $C'D'=1$，而點 P 在C點的速度是 $r(1-1/r)^2$，故P在 $1/r$ 時間內的距離爲 $CD=(1/r)\cdot r(1-1/r)^2=(1-1/r)^2$，因此

$$DZ=AZ-AB-BC-CD=r\left(1-\frac{1}{r}\right)^3$$

循此下去，可知點P在 $A,B,C,D\cdots\cdots$各點的速度分別爲

$$r,\quad r\left(1-\frac{1}{r}\right),\quad r\left(1-\frac{1}{r}\right)^2,\quad r\left(1-\frac{1}{r}\right)^3,\quad\cdots\cdots \tag{1}$$

其所對應的Q點位置 $A',B',C',D'\cdots\cdots$爲

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots\cdots \tag{2}$$

(注意 (2) 之數n與 (1) 中出現之 $(1-1/r)^n$ 的次數 n 相同) (2)式的每一個值，依定義是(1)式所對應之「Napier 對數」。

爲瞭解「Napier 對數」的性質，茲用現代的數學形式來說明。設

$$x=r\left(1-\frac{1}{r}\right)^y \tag{3}$$

y 就是「x的 Napier 對數」，此 Napier 對數以

$$\text{Nap. }\log x=y$$

表示，這並不是 Napier 所用的記號。

依自然對數的性質，由 (3) 可導出

$$\log_e x=\log_e r+y\log_e\left(1-\frac{1}{r}\right)$$

於是

$$y=\frac{\log_e x-\log_e r}{\log_e\left(1-\frac{1}{r}\right)}=\frac{r(\log_e r-\log_e x)}{-r\log_e\left(1-\frac{1}{r}\right)}$$

但

$$-r\log_e\left(1-\frac{1}{r}\right)=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r^2}+\cdots\cdots$$

故

$$y=\frac{r(\log_e r-\log_e x)}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r^2}+\cdots\cdots}$$

若令r爲極大的值，則上式之近似值成爲

$$y=r(\log_e r-\log_e x).$$

故得

$$\text{Nap. } \log x = r(\log_e r - \log_e x). \tag{4}$$

這樣一來

$$\text{Nap. } \log r = 0 \tag{5}$$

這就是 Napier 對數的特性。易於看出「x 大於 r 時，Nap. $\log x$ 爲負值，x 小於 r 時，Nap. $\log x$ 爲正值」。

其次設

$$x = r(1-1/r)^y, \quad x' = r(1-1/r)^{y'}.$$

則

$$xx' = r^2(1-1/r)^{y+y'}.$$

於是得

$$xx'/r = r(1-1/r)^{y+y'}.$$

依「Napier 對數」的定義

$$\text{Nap. } \log\frac{xx'}{r} = y + y' = \text{Nap. } \log x + \text{Nap. } \log x'. \tag{$*$}$$

由(4)得

$$\begin{aligned}\text{Nap. } \log(xx'/r) &= r(\log_e r - \log_e(xx'/r)\\ &= r(\log_e r - \log_e(xx')) + r\log_e r\\ &= \text{Nap. } \log(xx') + r\log_e r,\end{aligned}$$

於是將 Nap. $\log(xx'/r)$ 代入（$*$）得

$$\text{Nap. } \log(xx') = \text{Nap. } \log x + \text{Nap. } \log x' - r\log_e r. \tag{6}$$

又

$$\frac{x}{x'} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{y-y'},$$

故

$$r\frac{x}{x'} = r\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{y-y'},$$

$$\text{Nap. } \log\left(r\frac{x}{x'}\right) = y - y' = \text{Nao. } \log x - \text{Nap. } \log x'.$$

依(6)所示之性質

$$\text{Nap. } \log\left(r\frac{x}{x'}\right) = \text{Nap. } \log r + \text{Nap. } \log\frac{x}{x'} - r\log_e r$$

在(5)所示，Nap. $\log r$ 爲 0，故

$$\text{Nap. } \log\left(r\frac{x}{x'}\right) = \text{Nap. } \log\frac{x}{x'} - r\log_e r$$

結果得

$$\text{Nap. } \log\frac{x}{x'} = \text{Nap. } \log x - \text{Nap. } \log x' + r\log_e r. \tag{7}$$

從(6)與(7)所示的性質來看，「Napier 的對數」對於自然對數或常用對數之積、商的計算，本質上是具有同樣之性質。Napier 是以三角函數之計算爲對象，因此取 $r = 1000000$ 時，決定 Nap $\cdot\log\sec 90° = 0$。（參照(5)式）在那個時代既無 10^7 之記法，又欠小數之知識，所以才用那麼大的數吧！

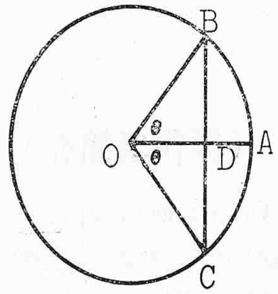
Napier 死後出版有 *De arte logistica*（計算技術的方法）。Napior 對於代數或幾何所寫的雜錄，不問其完成與否，據說有遺稿集，然因未目睹其中內容，故未能多言，但由「logistica 意指做好計算」來

看，Napier 的數學所示之一面是以計算爲主的學問。

〔資料參考 Sugaki seminar special number, 1971 年 12 月〕

本文作者賴漢卿先生現任教於清華大學數學系——編者按

編者按:



三角學源起於天文。（見圖）起初大家有興趣的是求一大圓中角 2θ 所對的弦長 BC（記做 $cd2\theta = BC$），後來又演變成求相應於角 θ 的 BD（即 $\sin\theta = BD$）。sin 函數和 cd 函數有密切的關係: $\sin\theta = \frac{1}{2}cd2\theta$。這就是「正弦」函數名稱的由來。最可注意的是那時 sin 函數的值是線段長而不是我們現在所知的比值。這樣的 sin 值當然和圓半徑的大小有關。最早的時候習慣取定半徑的長度爲 60 個單位（若用 3 做圓周率，則圓周要有 360 個單位長，所以每一度所對的弧長的爲一個單位。），而製造三角函數表。當然大家知道這樣的函數表是要相對於半徑長來看才會眞正有用。（實際上這就是現代的三角函數的觀念。）如果要得到較精確的函數值，則其小數部分不能隨便捨去；但那時候的歐洲人不懂得小數表示法，他們只會用分數，而且分數的符號及運算技巧都非常笨拙。爲了避免計算上的困難只有將半徑的單位個數加大，使得相應函數值小數以下的部分可以略去。在Napier的時候，通常三角函數表中的半徑長變成 10^7 那麼大，於是當他爲了解決天文上計算的困難而做對數表時，他就取 γ 長爲 10^7。在這樣的 γ 長之下，$\sin 90° = 10^7$ 所以 Naplog Sin $90° = 0$。

Napier 的對數（其底數爲 $1 - \frac{1}{10^7}$）是由三角學的計算而起的，不好用到其他方面的計算。他及 Henry Briggs (1561-1631) 不久就發現以 10 爲底的對數最方便最實用，所以 Napier 的對數只曇花一現，不久就被常用對數替代了。