

解題方法之學習與教導

坡里雅 原著
張憶壽 譯

以下兩段文字分別是名數學家坡里雅教授 (G. Polya) 所著 *Mathematica discovery* 中之「序」與「給老師們」。健康的數學書籍或文章可以分為兩類：一類以傳達數學知識為目的，一類以啟發讀者為目的。在國內，啟發讀者的書籍為數不多，而且不受重視，以至於有不知啟發之為物。可悲可嘆！我們慎重推出這段譯文，以供參考。譯者深信，優秀的中學老師已經累積了無數的寶貴經驗，這些經驗將是啟發性數學書籍的上好材料。又，*Mathematical discovery* 之中譯本正由人間文化事業公司排印中，即日出版。——譯者

1. 序

1. 解決問題的意思是要找尋避免困難、跨越阻礙的辦法，以便達到一個無法立即達到的目的。解決問題是智力上的巧妙成就，而智力，則是人類的獨立稟賦；解決問題標誌着人類行為的基本特點。本書的目的是要討論解題活動中的種種情況，以便增進讀者的解題能力。

2. 全書分為兩個部份，茲簡略介紹如下。

解決問題是一種藝術，跟游泳、溜冰、彈鋼琴一樣：只有靠著模仿和練習才能學會。本書所提供的不是一把萬能鑰匙，而是一個模仿與練習的上好機會，學習游泳一定要下水，學習解題能力也一定要有適當的練習機會。

假設你解決了一個問題，而希望從中獲取最大的利益，那麼，你該把這回的解題過程加以詳細分析，找出將來可能再度出現的重要情況。你親自解決的問題，或者你仔細研讀過的問題解答都可能成為你的一個範本，將來遇到類似的問題，你便有了一個可以遵循模仿的例子。本書的第一部分就在提供一些常用的解題範本或模式。

把學到的解題方法應用到類似的問題上也許十分容易，但是，問題之間如果不是十分相似，那麼，模仿起來就可能會有困難。然而，人類有一個根深蒂固的慾望：找尋一個能夠解決所有問題的方法。我們一般人也許不十分在意這種解題靈丹，但是，神話故事與某些哲學家的著作卻極其明白的述說了這種慾望；也許你還記得那個開閉洞門的神妙語詞，笛卡爾思索過解決問題的通則，萊布尼茲也清晰的陳述了一個完美的解題辦法。但是，能夠解決所有問題的靈妙辦法卻始終沒有找到，有的夢想大概終歸只是夢想。不過，這個沒法實現的夢想卻也可能頗有作用：沒有人到過北極星，但是，遙望着它却足以判定方向而找到歸途。我們將不提供你解決問題的萬靈丹。（沒有書能提供這東西。）我們要把一般的解題方法作一介紹，希望能因此幫助你釐清思路，增進解題能力。這將是本書第二部分的內容要點。

24 數學傳播〔論述類〕

3. 本書所討論的是解題方法，我將把研究解題方法的學問稱之為啓發理論。啓發一詞曾為哲學家們使用，而在目前，卻遭冷落，但是，我仍將採用它。

本書是在具體的講述啓發理論：我極力勸使讀者嘗試親自解題，並且思索解題過程中的若干景象。

本書用了大部分的篇幅來詳細講述幾道問題的解答。一個數學家，如果他的興趣不在於解題方法的話，是不會喜歡這種近乎嚼嚙的詳細解釋。實際上，我們所講的解答不僅僅是解答，而根本是這解答的個案史。我們講述了解答中各個主要步驟的前後關係與發現經過，希望能把尋找解答的心路歷程明白的說出來。這種細緻的、一板一眼的講述解答是有目的的，是要指出若干解題的通則或範本，以便讀者能在相似的問題中運用自如。解題通則或範本往往是在講完個案史之後，另起章節予以討論，當然也偶而會參夾在個案史中作一點零星的介紹。

每章之後均附有例題與評註。讀者可以經由這些例題去應用、體會主文中的各項觀點。例題間的評註對於主文作了若干引伸，也對一點精微細緻的東西作了介紹。

我不知道我有多少成績，但我確實盡了力去引起讀者的參與。我是以課堂上最有效的方式寫成本書。在講述個案史的時候，我極力讓讀者獲取若干研究工作的感覺。在問題的選擇、陳述與處理上，我極力的刺激讀者、挑起興趣，讓他有機會充分接觸研究工作中的各種情況。

4. 本書所討論的主要是數學問題。非數學問題很少提到，但是它們是被包括在一般論點之中的。實際上，我在處理數學問題時，總是存着這麼一個心理，要儘量的同時指出非數學問題的解決方法。

本書很少談到高深的數學問題。但它實在是本書的實際背景。實際上，本書內容主要來源於我個人的數學研究工作，我在初等問題上的處理方式反映着我在高深數學上的經驗，而這些高深數學卻不適於列入本書。

5. 本書的目的有其理論上的一面：研究啓發理論。也有其具體、迫切而又實際的一面：提高中學數學師資。

我個人在過去幾年間的教學都是以中學老師為對象，藉着這個大好機會，我做了觀察，也提出了我個人對於中學數學師資的意見。我希望我的意見是持平而公正的，我的意見只有一點：中學老師的學養不夠充分。我認為所有有關的機構都該承擔此一責任，特別是各個教育學院與數學系，應當仔細檢討它們的課程安排，以便改進目前的情況。

優秀的中學老師在他的大學教育期間該學些什麼？這是個很難回答的問題，除非我們先回答了：中學生該學些什麼？

也許你認為這問題沒意思畢竟是個爭論不休的問題，不易提出一個各方同意的答案。這真是個不幸的情況，但是，在專家的眼光下，這個問題還是有一個大家意見一致的地方。

我們在任何方面的知識都是由兩個部分組成：資料與智慧。如果你有一些真正的數學經驗，初等的或高深的，那麼，你會毫無疑問的認為，在數學的範圍裏，學習智慧是比單純的熟悉資料為重要。因此，在中學，在每一級的學校裏，我們都得配合着資料的傳授而講解一些智慧性的知識。

數學中的智慧是什麼？是解題能力——不只是解決常規問題，還要帶着創意的去解決非常規性的問題。因此，中學的數學教育應該以解題方法為其教育學生的首要任務。這是我個人的信念，或許你不同意，但是，我想你至少會認為解題方法是值得重視的東西。

老師的責任是幫助學生發展解題能力、培養思考能力。他應當鼓勵學生從事創造性的思考活動——但是，如果他自己所受的教育就有缺陷，他沒有弄通教材，沒有培養解題與思考的能力，也沒有留意到創造性的思考活動，怎麼辦？我認為，目前中學數學師資不良的根本原因就在這裏。

補救的辦法是在師資的養成教育期間適當地插入若干創造性的活動。我的做法是主持幾個解題方法的討論會。本書的內容便是我當初主持討論的材料與指引；請參閱本書之「給老師們」。我希望能因此提高中學的數學師資。無論如何，這是本書的現實目的。

我相信，本書得益於我個人長期同時重視上述的兩個方面，理論與實際。有的讀者關心解題方法的本身，有的讀者關心他個人的解題能力，或者他的學生的解題能力，但是，我相信，這些之間是相輔相成毫不衝突的。

6、7、8、從略。

蘇黎士、瑞士 1961年12月

喬治·坡里雅

II. 給老師們

老師們如果想要利用本書幫助教學的話，他得閱讀本書前邊的「給讀者們」（編按：請讀者參閱原書或中譯本），還得注意以下諸點：

1.正如序言中所說，本書的目的是要給中學數學老師提供一個瞭解「創造性活動」的適當機會。沒有享受過發明經驗的老師大概很難激起、引領、甚至辨認學生的發明活動與發明能力。

一般的老師沒有機會在高深數學裏邊從事創造性的研究工作，但是，解決一些非常規性的問題也是極為真實的創造性活動。本書問題所牽涉到的數學知識雖然只是中學程度，但是，它所須的注意力與判斷力卻是不容忽視。我認為這種形式的創造性活動應當是培養中學數學師資的必要項目。實際上，透過解決這些問題可以獲得一些與中學數學教材相關的，能夠運用的真正知識，而不是僅僅記住而已。更重要的，他可以獲得一些處理中學數學的智慧，與解決問題所須的透視力。這些種種將使他具備指導與品評學生能力的基本素養。

2.本書共分兩冊，關於解題方法的教授在第二冊中會有更詳盡的解說。

本書所列問題極多，可以在課堂上採用。老師們若能將本書的問題適當地插入課堂加以討論將是極有意義的工作。

每當問題的解答已經得到而且十分明瞭之後，仔細的多加回想將會受益，反射自問：「這問題可以用到什麼地方？須要多少數學知識才能解這問題？要先做些什麼樣的問題才能提出這道問題？我該怎樣的向學生提出這問題？」這些都是極好的問句，但是最好的問句是你能夠自然而然提出的問句。

3.雖然這不是一本教科書，但是它的內容相當適合作為「問題研究討論會」的教材。我個人曾在好幾個學校主持為中學老師舉辦的問題討論會；有的同事對這種討論會感到興趣，向我索取教材；據我所知，後來有好幾個學校也舉辦了這樣的討論會；我希望能有更多的學校也試試這類的討論會。這是我急切的將本書第一冊先行付印的原因。

4.經過若干嚐試，我發現了一套主持研討會的辦法，茲敘述如下，此供參考。

能夠提供解題模式的典型問題都在堂上的討論中予以解決；本書的前四章便是儘量的以文字重述當時的研討景象。問題解決後，主要的工作是指出解決過程中所採用的模式——許多章節的主文也都對於這一點作了交待。

學生們的家庭作業是解題，要他們透過解題去運用、明瞭、掌握課堂上所討論的解題模式。

5.我要求參加研討會的人都有若干教學的實習機會，把問題解釋給別人聽，把解答說給不懂的人聽。這種教學的實習機會在目前的師資養成階段極為不足。

學生們的家庭作業中，比較有創意或比較微妙的地方都會在堂上加以解說，解說的人要不就是在這地方做得漂亮的同學，要不就是做得最差的同學。一段時間之後，班上同學對於這種討論方式逐漸熟悉，而討論的主持人也便將由班上同學輪流擔任。然而，最好的實習方式是分為三個階段的小組討論。茲介紹如下：

首先，發給班上每一位同學一道不同的題目，要他們在第一節中解掉。任何人都不得相互交談，但是可以請教老師，要求幫助。

第二節以檢視自己的解答為主工作。除了要求解答完整要正確，還要簡化做法，而且儘可能的找尋一

26. 數學傳播〔論述類〕

些其他的解法，將問題澈底的消化掉。此外，還得計劃一下，看看要怎麼樣的把問題與解答講述給旁人聽。在這一節中，任何困難都可以請老師指點。

第三節是最後一節，同學們自行組成小組進行討論，每組以四人為原則。小組討論時，由其中一人擔任老師，其他的仍做學生。這位「老師」把他剛才解決的問題講述給「學生」聽，並且一如老師在堂上所做的，要想辦法提起「學生」的興趣，引領大家走向解答。解答講解完畢，便是一段相互的善意批評。之後，將由其他同學輪流講述，直到每一位同學都完畢了，再請同學重新分組，進行討論，這樣子大家都有好幾次的講述機會而達到觀摩改進的效果。特別有趣的問題，或者講得特別精彩的段落可以拿到全班的討論會上再講一次。

我所主持的分組討論很快的便受到大家喜愛，我覺得相當成功。班上許多同學本來已是極有經驗的老師，他們也認為這種方式提供了不少教導學生的寶貴意見。

6. 本書可供在大學裏邊主持「問題研討會」的先生們參考（尤其是當他第一次主持這種會的時候）。他可以採用上述的方式（4與5）進行討論，可以採用本書的前四章作為教材。每章後邊的問題可以列為家庭作業，本書問題均有解答，但是，有時候須加補充才算詳盡完整。（家庭作業不可以隨便指定，要仔細比較挑選才會合用。）逢到考試或者期末報告，老師或許想找些書本沒有的陌生問題，關於這一點，請參閱別的相關書籍（以及 ex. 1.50, 2.78 與 3.91）。分組討論時所採用的問題要稍微難一點，而且不一定要繞着本書的範圍選題目，本冊及第二冊都有若干值得參考的問題。

第五章及第六章也可以納入研討範圍。它們的功用將在第二冊中予以詳細討論。

當然，有經驗的老師是能夠抓住本書的精神而不斤斤計較細節的。

本文譯者現任教於中大數學系——編者按