數學傳播 33卷4期, pp. 67-82

深入研究課本一題

石長偉

內容提要: 首先本文給出了課本一復習參考題的多種證法, 其次採用層層設問, 逐步提出了“數學歸納 — 微分法”, 最後給出了此法的廣泛的應用。

關鍵詞: 多種證法 、多維均值不等式 、直接證明 、假定分析 、數學歸納 — 微分法。

1. 問題的提出:

人民教育出版社 2003年出版的高中數學 (必修本) 第二冊 (上) 復習參考題六 B 組題 2 是:

已知 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 且 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 都是正數,

求證 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 2^n$。 (1)

2. 問題的解決:

分析: 偵查 (1) 式, 則獲如下特徵:

(i) 當且僅當 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 等號成立;

(ii) 此式是關於非零自然數的不等式;

(iii) 因 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 所以 2可以試著拆 $1+1$。

根據以上三點, 我們給出了 (1) 式的如下多種證明。

證法1: (多維均值不等式)

因爲 $1+a_1\geq 2\sqrt{a_1}$ (1.1), $1+a_2\geq 2\sqrt{a_2}$ (1.2), ..., $1+a_n\geq 2\sqrt{a_n}$ $(1.n)$。
所以 $(1.1)\times(1.2)\times\cdots\times(1.n)$ 得: $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}=2^n$。

證法2: (數學歸納法)

1^0 當 $n=2$ 時, 不等式成立。即

$(1+a_1)(1+a_2)=1+(a_1+a_2)+a_1a_2\ge 1+2\sqrt{a_1a_2}+a_1a_2=\left(1+\sqrt{a_1a_2}\right)^2=2^2$。

2^0 假設 $n=k$ 時, 不等式成立。即在滿足 $a_1a_2\cdots a_k=1$ 時, 有 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)$ $\ge 2^k$。則當 $n=k+1$ 時, 在滿足條件 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1$,

即證 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})\underline{(1+a_k)(1+a_{k+1})}\ge 2^{k+1}$

不妨設 $a_k\ge 1$, $a_{k+1}\le 1$ 由歸納假設知

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{k-1})(1+a_ka_{k+1})\ge 2^k$$

即證 $(1+a_k)(1+a_{k-1})\ge 2(a+a_ka_{k+1})$ (2)

此式等價於 $(a_k-1)(1-a_{k+1})\ge 0$ 恒成立。

綜合 1^0 、2^0 不等式 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\ge 2^n$ 成立。

證法3: (分析法)

因爲

$$\begin{aligned}
\frac{2^n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} &= \frac{(1+1)^n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\\
&= \left(\frac{1+1}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}}\right)^n\\
&= \left(\sqrt[n]{\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}}+\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}}\right)^n\\
&= \left(\sqrt[n]{\frac{1}{1+a_1}\cdot\frac{1}{1+a_2}\cdots\frac{1}{1+a_n}}+\sqrt[n]{\frac{a_1}{1+a_1}\cdot\frac{a_2}{1+a_2}\cdots\frac{a_n}{1+a_n}}\right)^n\\
&\le \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_n}\right)\right]^n\\
&= \left[\frac{1}{n}(1+1+\cdots+1)\right]^n=1。
\end{aligned}$$

所以 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\ge 2^n$ 成立。

3. 問題證法的拓廣:

根據 (1) 式的特徵 (i) 、(ii), 我們提出如下猜想:

已知 $a_1a_2\cdots a_n=G_n$, 且 $m,a_1,a_2,\ldots,a_n$ 都是正數, 證明或否定:

$$(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_n)\ge\left(m+\sqrt[n]{G_n}\right)^n \tag{3}$$

證明: 因爲

$$
\begin{aligned}
&\frac{(m+\sqrt[n]{G_n})^n}{(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_n)}\\
&=\left(\frac{m+\sqrt[n]{G_n}}{\sqrt[n]{(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_n)}}\right)^n\\
&=\left(\sqrt[n]{\frac{m^n}{(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_n)}}+\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_n)}}\right)^n\\
&=\left(\sqrt[n]{\frac{m}{m+a_1}\cdot\frac{m}{m+a_2}\cdots\frac{m}{m+a_n}}+\sqrt[n]{\frac{a_1}{m+a_1}\cdot\frac{a_2}{m+a_2}\cdots\frac{a_n}{m+a_n}}\right)^n\\
&\le\left[\frac{1}{n}\left(\frac{m}{m+a_1}+\frac{m}{m+a_2}+\cdots+\frac{m}{m+a_n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{m+a_1}+\frac{a_2}{m+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{m+a_n}\right)\right]^n\\
&=\left[\frac{1}{n}(1+1+\cdots+1)\right]^n=1。
\end{aligned}
$$

所以 (3) 式成立。

通過分析法, 依據 n 元均值不等式, 使猜想變爲現實。其實式 (1) 隸屬式 (3) 的限定, 式 (3) 是式 (1) 的推廣。面對 (1) 式的多種證明, 我們不禁要問: (3) 式能否同證明 (1) 式一樣, 直接運用多元均值不等式或者運用數學歸納法呢?

考慮一: 根據二元均值不等式等號成立的條件是 $a_i=1$。若對 (2) 式直接運用二元均值不等式, 則有 $m+a_1\ge 2\sqrt{ma_1}$ (2.1), $m+a_2\ge 2\sqrt{ma_2}$ (2.2), $\ldots$, $m+a_n\ge 2\sqrt{ma_n}$ (2.n), 由 (2.1) $\times$ (2.2) $\times\cdots\times$ (2.n) 得 $(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_n)\ge 2^n\sqrt{m^nG_n}$, 這一結論顯然與 (3) 式矛盾。當然, 也可以從這 n 個不等式的等號成立的條件 $a_1=a_2=\cdots a_n=m$ 知 $G_n=m^n$ 與已知矛盾。

考慮二: 不妨, 我們假設此不等式依然可以運用數學歸納法證之。

1^0 當 $n=2$ 時, 不等式成立。即

$$
\begin{aligned}
(m+a_1)(m+a_2)&=m^2+m(a_1+a_2)+a_1a_2\ge m^2+2m\sqrt{a_1a_2}+a_1a_2\\
&=(m+\sqrt{a_1a_2})^2=(m+\sqrt{G_2})^2
\end{aligned}
$$

2^0 假設 $n=k$ 時, 不等式成立。即在滿足 $a_1a_2\cdots a_k=G_k$ 時, 有

$$(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_k)\ge\left(m+\sqrt[k]{G_k}\right)^k。$$

則當 $n=k+1$ 時, 在滿足條件 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=G_{k+1}$, 即證

$$(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_{k-1})(m+a_k)(m+a_{k+1})\geq\Big(m+\sqrt[k+1]{G_{k+1}}\Big)^{k+1}。$$

不妨設 $a_k\geq G_{k+1}$, $a_{k+1}\leq G_{k+1}$ 由歸納假設知

$$(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_{k-1})(m+a_ka_{k+1})\geq\Big(m+\sqrt[k]{G_k}\Big)^{k}。$$

因爲 $\sqrt[k+1]{G_{k+1}}$ 與 $\sqrt[k]{G_k}$ 是隨著 n 變化的量, 所以我們無法得到如同證法 2中的關係式 (2)。因此, 這樣繼續下去已不再可能。是不是不等式 (3) 眞的不能用數學歸納法證明其成立嗎? (1) 式爲什麼卻“一舉成功”。雖然不等式 (1) 是不等式 (3) 的限定, 不等式 (3) 是不等式 (1) 的推廣。“限定”是“推廣”的特殊表現形式, “推廣”代表了“限定”的普遍規律。因此, “推廣”或多或少的的保留著“限定”的影子。基於此, 我們不能不再做探索。“路慢慢其修遠兮, 吾將上下而求索。”

通過以上分析, 我們知道, 運用數學歸納法的難度及關鍵之處是從以假設 $n=k$ 時命題成立爲已知條件向 $n=k+1$ 命題也成立之間的過渡。於是, 假設 $n=k$ 時, 不等式成立。即在滿足前提條件 $a_1a_2\cdots a_k=G_k$ 下, 有

$$(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_n)\geq\Big(m+\sqrt[k]{G_k}\Big)^{k}。$$

則當 $n=k+1$ 時, 因爲 $G_k=a_1a_2\cdots a_k$, 所以欲證的不等式的前提條件自然而然的變爲 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=G_{k+1}$, 即 $a_1a_2\cdots a_k=\frac{G_{k+1}}{a_{k+1}}$, 由歸納假設知

$$(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_k)\underline{(m+a_{k+1})}\geq\underline{(m+a_{k+1})}\bigg(m+\sqrt[k]{\frac{G_{k+1}}{a_{k+1}}}\bigg)^{k}。\tag{4}$$

由原來的假設不可假之, 到現在的新的結果的產生, 不能不使人有些欣喜。不過, 由 (4) 式如何得到 $(m+a_{k+1})(m+\sqrt[k]{\frac{G_{k+1}}{a_{k+1}}})^k\geq(m+\sqrt[k+1]{G_{k+1}})^{k+1}$ 呢? 一切的發現都源於細緻入微的觀察。從變量的角度來看, (4) 式中的變量只有 G_{k+1} 與 a_{k+1}; 再從欲證明的結果 $(m+\sqrt[k+1]{G_{k+1}})^{k+1}$ 來看, 可以認爲 G_{k+1} 是相對於 a_{k+1} 不變的量, a_{k+1} 是相對於 G_{k+1} 的變量。從數學是研究量與量之間的關係來分析, 這也是符合我們的理念的。因此, (4) 式的右邊唯有 a_{k+1} 是變量。於是, 我們設 $a_{k+1}=x$, 則有

$$f(x)=(m+x)\bigg(m+\sqrt[k]{\frac{G_{k+1}}{x}}\bigg)^{k}。$$

由 $a_{k+1}\in R^+$ 知 $x\in R^+$。此函數是關於 x 的非初等函數, 所以直接求導求其最小值豈不妙哉?

因為 $f'(x)=m\Big(m+\sqrt[k]{\frac{G_{k+1}}{x}}\Big)^{k-1}\Big(1-\frac{\sqrt[k]{G_{k+1}}}{\sqrt[k]{x^{k+1}}}\Big)$, 令 $f'(x)=0$ 知 $x=\sqrt[k+1]{G_{k+1}}$; 則 $(0,\sqrt[k+1]{G_{k+1}})$ 為 $f(x)$ 的遞減區間且 $(\sqrt[k+1]{G_{k+1}},+\infty)$ 為遞增區間。

故 $f(x)\ge f(\sqrt[k+1]{G_{k+1}})=(m+\sqrt[k+1]{G_{k+1}})^{k+1}$
即 $(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_k)(m+a_{k+1})\ge(m+\sqrt[k+1]{G_{k+1}})^{k+1}$
再綜合 $n=2$ 時的結果, 不等式 $(m+a_1)(m+a_2)\cdots(m+a_n)\ge(m+\sqrt[n]{G_n})^n$ 成立。

回顧整個思維過程, 運用的方法是數學歸納法與微分法的結合。首先是在數學歸納法大的框架的支撐下, 運用微分作為建築材料, 構建了一件精美的藝術品。如果說數學歸納法是基石, 那麼微分法則是基石上建造的里程碑。把微分法比喻為里程碑一點也不過分, 因為微積分本身被喻為數學上的里程碑。因此, 我們把其稱之為“微分 — 數歸法”。能把這二者巧妙的結合在一起, 可謂從“煞費心機”, “苦心經營”, “殫精竭慮”, 到“山重水盡疑無路, 柳暗花明又一村”的一個探索的歷程。

4. “數學歸納 — 微分法” 的應用:

關於新的這種方法的應用, 舉不勝舉, 限於篇幅, 筆者僅列舉五例加以說明。

例 1. 算幾不等式 (Arithmetic-mean-Geometric-mean inequality):

設 $a_1,a_2,\ldots,a_n$是n個正數, 它們的算術平均值$A_n(a)$定義為$A_n(a)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 它們的幾何平均值 $G_n(a)$ 定義為 $G_n(a)=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$, 則

$$A_n(a)\ge G_n(a)。\tag{5}$$

最早使用兩個正實數的算術平均值、幾何平均值概念的是畢德哥拉斯, 歐幾里德的給予了證明。1821年, 柯西第一個給出了 AG 不等式 (5) 的證明。他的證明中首先使用了向前向後歸納法 (也稱倒退歸納法、反歸納法)。此後, 許多數學家基於不同的數學原理給出了 AG 不等式 (5) 的多種證明。事實上至今已有上百種不同的證明方法, 但共同的缺點是在運用數學歸納法以假設 $n=k$ 時命題成立為已知條件向 $n=k+1$ 命題也成立之間的過渡時過於技巧化, 失去了數學本身追求的自然美。因此, 在處給出其直接證明。

證明: 1^0 當 $n=2$ 時, 不等式顯然成立。即 $a_1a_2\le\Big(\dfrac{a_1+a_2}{2}\Big)^2$。

2^0 假設 $n=k$ 時, 不等式成立。即在 $S_k=\sum\limits_{i=1}^k a_i$ 且 $G_k=\prod\limits_{i=1}^k a_i$ 時, 有 $G_k\le\Big(\dfrac{S_k}{k}\Big)^k$。

則當 $n=k+1$ 時, $S_{k+1}-a_{k+1}=\sum\limits_{i=1}^k a_i=S_k$。由假設知 $G_{k+1}\le a_{k+1}\Big(\dfrac{S_{k+1}-a_{k+1}}{k}\Big)^k$,

設 $f(x)=x\Big(\dfrac{S_{k+1}-x}{k}\Big)^k$, 則 $f'(x)=\Big(\dfrac{S_{k+1}-x}{k}\Big)^{k-1}\Big(\dfrac{S_{k+1}-x}{k}-x\Big)$。令 $f'(x)=0$ 知 $x=\dfrac{S_{k+1}}{k+1}$。則 $\Big(0,\dfrac{S_{k+1}}{k+1}\Big)$ 為 $f(x)$ 的遞增區間且 $\Big(\dfrac{S_{k+1}}{k+1},+\infty\Big)$ 為 $f(x)$ 遞減區間。故

$$f(x)\le f\Big(\frac{S_{k+1}}{k+1}\Big)=\Big(\frac{S_{k+1}}{k+1}\Big)^{k+1}。$$

即 $G_{k+1}\le\Big(\dfrac{S_{k+1}}{k+1}\Big)^{k+1}$。

綜合 1^0 、2^0 不等式 (5) 成立。

例2. 詹森不等式 (Jensen inequality)

若 $f(x)$ 是區間 (a,b) 上的凸函數, 則對任意的點 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a,b)$ 有

$$f\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\Big)\le\frac{1}{n}\Big[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\Big]。\tag{6}$$

J. L. W. V. Jensen 於 1905年首先運用不等式 (6) 的二元形式定義了凸函數, 1906年證明不等式 (6) , 但眾多證法不夠自然和簡潔。在此, 給出一種簡證。

證明: 1^0 當 $n=2$ 時, 由凸函數的定義知 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\ge f\Big(\dfrac{x_1+x_2}{2}\Big)$ 不等式成立。
2^0 假設 $n=k$ 時, 即在滿足條件 $s_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$ 時, 有不等式

$$\sum_{i=1}^{k}f(x_i)\ge kf\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}x_i}{k}\right)$$

則當 $n=k+1$ 時, 在滿足條件 $x_1+x_2+\cdots+x_k=s_{k+1}-x_{k+1}$, 由假設知

$$\sum_{i=1}^{k+1}f(x_i)=f(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}f(x_i)\ge kf\Big(\frac{s_{k+1}-x_{k+1}}{k}\Big)+f(x_{k+1})。$$

設 $F(x)=kf\Big(\dfrac{s_{k+1}-x}{k}\Big)+f(x)$, $x\in(0,s_{k+1})$, 則

$$F'(x)=f'(x)-f'\Big(\frac{s_{k+1}-x}{k}\Big);\quad F''(x)=f'(x)+\frac{1}{k}f'\Big(\frac{s_{k+1}-x}{k}\Big),$$

令 $F'(x)=0$ 知 $x=\dfrac{s_{k+1}}{k+1}$ 為其一根。由凸函數的定義知 $f'(x)>0$ 以及函數的圖像的橫坐標的壓縮或伸長不影響值域的變化知 $x=\dfrac{s_{k+1}}{k+1}$ 為 $F'(x)=0$ 唯一的根。因此, 函數 $F(x)$ 的單調遞減區間為 $\Big(0,\dfrac{s_{k+1}}{k+1}\Big)$, 單調遞增區間為 $\Big(\dfrac{s_{k+1}}{k+1},s_{k+1}\Big)$。於是,

$$F(x)\ge F\Big(\frac{s_{k+1}}{k+1}\Big)=(k+1)f\Big(\frac{s_{k+1}}{k+1}\Big)=(k+1)f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}x_i}{k+1}\right).$$

故不等式 $f\Big(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\Big) \le \dfrac{1}{k+1}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})]$ 成立。

綜合 1^0 、2^0 不等式 (6) 成立。

例3. 設 $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = m$, $0 < m \le 1$, $n \ge 3$ 則

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big) \ge \Big(\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\Big)^n。\tag{7}$$

此題我們依然運用數學歸納法。不過, 在第 2^0 步有所不同, 具體如下:

1^0 首先證明當 $n = 3$ 時, 不等式成立。根據算幾不等式, 我們得到:

$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 \ge 2x_1x_3x_2^2$ ① $x_1^2x_2^2 + x_3^2x_1^2 \ge 2x_2x_3x_1^2$ ② $x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 \ge 2x_1x_2x_3^2$ ③

①+②+③, 得

$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 \ge x_1x_2^2x_3 + x_1x_3^2x_2 + x_3x_1^2x_2$ ④

$x_1x_2x_3 \le \Big(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\Big)^3.$ ⑤

又據 Cauchy 不等式知 $\Big(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}\Big)(x_1+x_2+x_3) \ge (1+1+1)^2$, 即

$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3} \ge \dfrac{9}{x_1+x_2+x_3}$, ⑥

將 ④, ⑤, ⑥ 聯立, 於是, 得

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{3}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big) &= \frac{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)}{x_1x_2x_3}\\
&= \frac{1-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2)-x_1^2x_2^2x_3^2}{x_1x_2x_3}\\
&= \frac{1-m^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2)-x_1^2x_2^2x_3^2}{x_1x_2x_3}\\
&\ge \frac{1-m^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+(x_1x_2^2x_3+x_1x_3^2x_2+x_3x_1^2x_2)-x_1^2x_2^2x_3^2}{x_1x_2x_3}\\
&= \frac{1-m^2}{x_1x_2x_3}+2\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\Big)+m-x_1x_2x_3\\
&\ge \frac{27(1-m^2)}{(x_1+x_2+x_3)^3}+\frac{18}{x_1+x_2+x_3}+m-\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\Big)^3\\
&= \frac{27}{m^3}-\frac{9}{m}+m-\frac{m^3}{27}
\end{aligned}$$

$$=\Big(\frac{3}{m}\Big)^3+\Big(-\frac{m}{3}\Big)^3+3\Big(\frac{3}{m}\Big)^2\Big(-\frac{m}{3}\Big)+3\Big(\frac{3}{m}\Big)\Big(-\frac{m}{3}\Big)^2=\Big(\frac{3}{m}-\frac{m}{3}\Big)^3。$$

即不等式 $\prod\limits_{i=1}^{3}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{3}{m}-\frac{m}{3}\Big)^3$ 成立。

2^0 **證法**1: 假設 $n=k$ $(k\geq 3)$ 時, 不等式成立。
即在滿足條件 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=m$ 時, 有 $\prod\limits_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{k}{m}-\frac{m}{k}\Big)^k$。
則當 $n=k+1$ 時, 不妨設 $x_{k+1}\leq x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 且記
$m_1=m-x_{k+1}$, $m_2=x_{k+1}+\dfrac{k-1}{k+1}m$, $m_3=\dfrac{m_1}{k}+\dfrac{m_2}{k}+\dfrac{m}{k+1}=\dfrac{3m}{k+1}$,
不難知道, $m_1,m_2,m_3\in(0,1)$, 於是,

$$\prod_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{k}{m_1}-\frac{m_1}{k}\Big)^k, \tag{8}$$

$$\Big(\frac{1}{x_{k+1}}-x_{k+1}\Big)\left(\frac{1}{\big(\frac{m}{k+1}\big)}-\frac{k+1}{m}\right)^{k-1}\geq\Big(\frac{k}{m_2}-\frac{m_2}{k}\Big)^k, \tag{9}$$

$$\left(\frac{1}{\big(\frac{m_1}{k}\big)}-\frac{m_1}{k}\right)\left(\frac{1}{\big(\frac{m_2}{k}\big)}-\frac{m_2}{k}\right)\left(\frac{1}{\big(\frac{m}{k+1}\big)}-\frac{m}{k+1}\right)\geq\Big(\frac{3}{m_3}-\frac{m_3}{3}\Big)^3, \tag{10}$$

$(3)\times(4)\times(5)^k$, 得

$$\Big(\frac{k+1}{m}-\frac{m}{k+1}\Big)^{2k-1}\prod_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{3}{m_3}-\frac{m_3}{3}\Big)^{3k}=\Big(\frac{k+1}{m}-\frac{m}{k+1}\Big)^{3k},$$

即 $\prod\limits_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{k+1}{m}-\frac{m}{k+1}\Big)^{k+1}$。

綜合 1^0 、2^0 知不等式 (7) 成立。

此法是宋慶先生在北京師範大學主辦的《數學通報》2006年第 3期上提出的, 可謂獨具匠心, 但以"假設當 $n=k$ 式不等式成立"爲已知條件到"當 $n=k+1$ 式不等式成立"的過渡過程使人難以想到。對此, 我們運用"數學歸納 — 微分法"。

證法2: 假設 $n=k$ 時, 不等式成立。即

$$\prod_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{k}{m}-\frac{m}{k}\Big)^k, \tag{11}$$

則當 $n=k+1$ 時, 由已知有 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}x_i=m$ 即 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=m-x_{k+1}$

由假設知 $\prod_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{k}{m-x_{k+1}}-\frac{m-x_{k+1}}{k}\Big)^k$。

故 $\prod_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{k}{m-x_{k+1}}-\frac{m-x_{k+1}}{k}\Big)^k\Big(\frac{1}{x_{k+1}}-x_{k+1}\Big)$。

設 $f(x)=\Big(\frac{k}{m-x}-\frac{m-x}{k}\Big)^k\Big(\frac{1}{x}-x\Big)$, $x\in(0,m)$。則

$$f'(x)=\Big(\frac{k}{m-x}-\frac{m-x}{k}\Big)^{k-1}\left(\bigg[\Big(\frac{k}{m-x}\Big)^2+1\bigg]\Big(\frac{1}{x}-x\Big)-\Big(\frac{1}{x^2}+1\Big)\Big(\frac{k}{m-x}-\frac{m-x}{k}\Big)\right)$$

設 $f'(x)=0$ 可得方程

$$\frac{x^{-2}+1}{x^{-1}-x}=\frac{\Big(\frac{m-x}{k}\Big)^{-2}+1}{\Big(\frac{m-x}{k}\Big)^{-1}-\frac{m-x}{k}} \tag{12}$$

通過觀察, 易知 $x=\frac{m}{k+1}$ 爲 (12) 的一根。下面我們特地證明 $x=\frac{m}{k+1}$ 爲 (12) 唯一的根。

因爲 $x\in(0,m)$ $(0<m\leq 1)$, 所以 $\frac{m-x}{k}\in(0,\frac{m}{k})$ $(0<m\leq 1)$

設函數 $g(x)=\frac{x^{-2}+1}{x^{-1}-x}=\frac{1+x^2}{x-x^3}$ 且 $x_1=x$, $x_2=\frac{m-x}{k}$, 則有 $g(x_1)=g(x_2)$。欲使 (12) 的解具有唯一性, 則函數 $g(x)$ 必然是單調函數。也就是說, 函數 $g(x)$ 的定義域必然是函數本身的單調遞減區間或單調遞增區間的子集。既然使函數 $g(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 都有定義且 $g(x_1)=g(x_2)$, 所以必須 $x_1=x_2$。即 $g(x)$ 的定義域爲 $\Big(0,\frac{m}{k}\Big)$。

於是, $g'(x)=\frac{x^4+4x^2-1}{(x-x^3)^2}$。令 $g'(x)=0$ 知 $x=\sqrt{\sqrt{5}-2}$。則 $(0,\sqrt{\sqrt{5}-2})$ 爲 $g(x)$ 的遞減區間且 $(\sqrt{\sqrt{5}-2},+\infty)$ 爲 $g(x)$ 遞增區間。因爲定義域屬於單調區間的子集, 所以 $\frac{m}{k}<\sqrt{\sqrt{5}-2}$。欲使此不等式成立, 則 $\sqrt{\sqrt{5}-2}$ 必須大於 $\frac{m}{k}$ 的最大值; 由於 $0<m\leq 1$, 故 $\frac{m}{k}$ 的最大值爲 $\frac{1}{k}$, 即 $\frac{1}{k}<\sqrt{\sqrt{5}-2}$。所以 $k>\sqrt{\sqrt{5}-2}\approx 2.05817$ 與已知條件 $k\geq 3$ 完全吻合。即 $x=\frac{m}{k+1}$ 爲方程 (12) 的唯一的根。

因此, $\Big(0,\frac{m}{k+1}\Big)$ 爲 $f(x)$ 的遞減區間且 $\Big(\frac{m}{k+1},m\Big)$ 爲 $f(x)$ 的遞增區間。故

$$f(x)\geq f\Big(\frac{m}{k+1}\Big)=\Big(\frac{k+1}{m}-\frac{m}{k+1}\Big)^{k+1} \tag{13}$$

即 $\prod_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{x_i}-x_i\Big)\geq\Big(\frac{k+1}{m}-\frac{m}{k+1}\Big)^{k+1}$。

綜合 1^0, 2^0 不等式 (7) 成立。

由證法 2知, 不等式 (13) 是在假設 (12) 的基礎上的分析的結論。因此, 我們把數學歸納法證明類似不等式的這種分析過程稱之爲“假定分析”。通過“假定分析”的歷程, 我們可以確定類似不等式中 n 的取值範圍。

例4: 陝西師範大學主辦的《中學數學教學參考》2005年 7月舉辦的第二屆中學生數學智慧通訊賽高二年級第 20題:

已知正數 a, b 滿足 $a+b=1$。求證 $\Big(\dfrac{1}{a^3}-a^2\Big)\Big(\dfrac{1}{b^3}-b^2\Big)\geq\Big(\dfrac{31}{4}\Big)^2$。

經過項數、常數的簡單推廣, 我們不難發現如下命題:

設 $x_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $(n\geq 2)$且 $\sum\limits_{i=1}^n x_i=m$ $(0<m\leq 1)$, 則 $\prod\limits_{i=1}^n\Big(\dfrac{1}{x_i^3}-x_i^2\Big)\geq\Big(\Big(\dfrac{n}{m}\Big)^3-\Big(\dfrac{m}{n}\Big)^2\Big)^n$。

證明: 1^0 當 $n=2$ 時, 設 $x_1^{-1}=x$, $x_2^{-1}=y$, 由 $x_1+x_2=m$, 知 $x+y=mxy$, 於是, 由二元算幾何不等式知 $xy\geq\dfrac{4}{m^2}$。

因爲 $(x+y)^5=x^5+y^5+5xy(x+y)[(x+y)^2-3xy]+10x^2y^2(x+y)$, 所以

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{x_1^3}-x_1^2\Big)\Big(\frac{1}{x_2^3}-x_2^2\Big)=\Big(x^3-\frac{1}{x^2}\Big)\Big(y^3-\frac{1}{y^2}\Big)&=\frac{(xy)^5-(x^5+y^5)+1}{(xy)^2}\\&=(1-m^5)(xy)^3+5m^3(xy)^2+\frac{1}{(xy)^2}-5m(xy)\end{aligned}$$

設 $t=xy$, $\Big(t\geq\dfrac{4}{m^2}\Big)$, 故 $f(t)=(1-m^5)t^3+5m^3t^2+\dfrac{1}{t^2}-5mt$ 於是,

$f'(t)=3(1-m^5)t^2+10m^3t-\dfrac{2}{t^3}-5m$;　　$f''(t)=6(1-m^5)t+10m^3+\dfrac{6}{t^4}$;

$f'''(t)=6(1-m^5)-\dfrac{24}{t^5}$;　　$f''''(t)=\dfrac{120}{t^6}$。

顯然, $f''''(x)>0$, 於是 $f'''(x)\geq f'''\Big(\dfrac{4}{m^2}\Big)=6\Big(1-m^5-\dfrac{m^{10}}{256}\Big)$。

設 $\omega=m^5$ $(0<t\leq 1)$, 易知 $\eta(\omega)=1-\omega-\dfrac{\omega^2}{256}<\eta(0)=1$, 即 $f'''(x)\geq 6$,

於是, $f''(t)\geq f''\Big(\dfrac{4}{m^2}\Big)=\dfrac{24}{m^2}-14m^3+\dfrac{m^8}{44}=\dfrac{1}{m^2}\Big(\dfrac{m^{10}}{44}-14m^5+24\Big)>0$,

所以 $f'(t)$ 在 $\Big[\dfrac{4}{m^2},+\infty\Big)$ 遞增函數,

即 $f'(t)\geq f'\Big(\dfrac{4}{m^2}\Big)=\dfrac{48}{m^4}-\dfrac{m^6}{32}-13m$,

又設 $G(m)=\dfrac{48}{m^4}-\dfrac{m^6}{32}-13m$, $(0<m\leq 1)$, 則 $G'(x)=-\dfrac{192}{m^5}-\dfrac{3m^5}{16}-13<0$,

因 $G(m)\geq G(1)>0$, 故 $f'(t)>0$, 即 $f(t)\geq f\Big(\dfrac{4}{m^2}\Big)=\Big(\Big(\dfrac{2}{m}\Big)^3-\Big(\dfrac{m}{2}\Big)^2\Big)^2$

即 $\prod\limits_{i=1}^{2}\Big(\dfrac{1}{x_i^3}-x_i^2\Big)\geq\Big(\Big(\dfrac{2}{m}\Big)^3-\Big(\dfrac{m}{2}\Big)^2\Big)^2$。

2^0 假設 $n=k$ 時, 不等式成立。即在 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i=m$ 時, 有 $\prod\limits_{i=1}^{k}\Big(\dfrac{1}{x_i^3}-x_i^2\Big)\geq\Big(\Big(\dfrac{k}{m}\Big)^3-\Big(\dfrac{m}{k}\Big)^2\Big)^k$,

則當 $n=k+1$ 時, $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=m-x_{k+1}$。

由假設知 $\prod\limits_{i=1}^{k+1}\Big(\dfrac{1}{x_i^3}-x_i^2\Big)\geq\Big(\Big(\dfrac{k}{m-x_{k+1}}\Big)^3-\Big(\dfrac{m-x_{k+1}}{k}\Big)^2\Big)^k\Big(\dfrac{1}{x_{k+1}^3}-x_{k+1}^2\Big)$。

設 $f(x)=\Big(\Big(\dfrac{k}{m-x}\Big)^3-\Big(\dfrac{m-x}{k}\Big)^2\Big)^k\Big(\dfrac{1}{x^3}-x^2\Big)$, 則

$$f'(x)=\Big[\Big(\frac{k}{m-x}\Big)^3-\Big(\frac{m-x}{k}\Big)^2\Big]^{k-1}\Bigg(\Big[3\Big(\frac{k}{m-x}\Big)^4+2(m-x)\Big]\Big(\frac{1}{x^3}-x^2\Big)$$
$$-\Big(\frac{3}{x^4}+2x\Big)\Big[\Big(\frac{k}{m-x}\Big)^3-\Big(\frac{m-x}{k}\Big)^2\Big]\Bigg)。$$

設 $f'(x)=0$ 可得方程

$$\frac{x^{-3}-x^2}{3x^{-4}+2x}=\frac{\Big(\dfrac{m-x}{k}\Big)^{-3}-\Big(\dfrac{m-x}{k}\Big)^2}{3\Big(\dfrac{m-x}{k}\Big)^{-4}+2\Big(\dfrac{m-x}{k}\Big)}\tag{14}$$

通過觀察, 易知 $x=\dfrac{m}{k+1}$ 爲 (14) 的一根。下面我們特地證明 $x=\dfrac{m}{k+1}$ 爲 (14) 唯一的根。

因爲 $x\in(0,m)$ $(0<m\leq 1)$, 所以 $\dfrac{m-x}{k}\in\Big(0,\dfrac{m}{k}\Big)$ $(0<m\leq 1)$。

設函數 $g(x)=\dfrac{x^{-3}-x^2}{3x^{-4}+2x}=\dfrac{x-x^6}{3+2x^5}$, 且 $x_1=x$, $x_2=\dfrac{m-x}{k}$, 則有 $g(x_1)=g(x_2)$。欲使 (14) 的解具有唯一性, 則函數 $g(x)$ 必然是單調函數。也就是說, 函數 $g(x)$ 的定義域必然是函數本身的單調遞減區間或單調遞增區間的子集。既然使函數 $g(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 都有定義且 $g(x_1)=g(x_2)$, 所以必須 $x_1=x_2$。即 $g(x)$ 的定義域爲 $\Big(0,\dfrac{m}{k}\Big)$。

於是, $g'(x)=\dfrac{3-26x^5-2x^{10}}{(3+2x^5)^2}$。令 $g'(x)=0$ 知 $x=\sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{7}-13}{2}}$。則 $\Big(0,\sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{7}-13}{2}}\Big)$ 爲 $g(x)$ 的遞減區間且 $\Big(\sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{7}-13}{2}},+\infty\Big)$ 爲 $g(x)$ 遞增區間。因爲定義域屬於單調區間的子集, 所以 $\dfrac{m}{k}<\sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{7}-13}{2}}$。欲使此不等式成立, 則 $\sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{7}-13}{2}}$ 必須大於 $\dfrac{m}{k}$ 的

最大值; 由於 $0 < m \le 1$, 故 $\dfrac{m}{k}$ 的最大值爲 $\dfrac{1}{k}$, 即 $\dfrac{1}{k} < \sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{7}-13}{2}}$。所以 $k > \left(\sqrt[5]{\dfrac{5\sqrt{7}-13}{2}}\right)^{-1} \approx 1.54288$ 與已知條件 $k \ge 2$ 完全吻合。即 $x = \dfrac{m}{k+1}$ 爲方程 $\Big[3\Big(\dfrac{k}{m-x}\Big)^4 + 2(m-x)\Big]\Big(\dfrac{1}{x^3} - x^2\Big) = \Big(\dfrac{3}{x^4} + 2x\Big)\Big[\Big(\dfrac{k}{m-x}\Big)^3 - \Big(\dfrac{m-x}{k}\Big)^2\Big]$ 的唯一的根。

因此, $\Big(0, \dfrac{m}{k+1}\Big)$ 爲 $f(x)$ 的遞減區間且 $\Big(\dfrac{m}{k+1}, m\Big)$ 爲 $f(x)$ 的遞增區間。故

$$f(x) \ge f\Big(\frac{m}{k+1}\Big) = \bigg(\Big(\frac{k+1}{m}\Big)^3 - \Big(\frac{m}{k+1}\Big)^2\bigg)^{k+1}。$$

綜合 1^0 、2^0 知不等式 $\prod\limits_{i=1}^{n}\Big(\dfrac{1}{x_i^3} - x_i^2\Big) \ge \bigg(\Big(\dfrac{n}{m}\Big)^3 - \Big(\dfrac{m}{n}\Big)^2\bigg)^n$ 成立。

例 5: 魏烈斌先生在中國不等式研究小組主辦的《不等式研究通訊 (季刊)》2006年第 4 期《一對不等式姐妹花》一文已經證明: 若 a, b, c 是正數, 且 $a+b+c=1$, 則 $\Big(\dfrac{1}{a+b} - c\Big)\Big(\dfrac{1}{b+c} - a\Big)\Big(\dfrac{1}{c+a} - b\Big) \ge \Big(\dfrac{7}{6}\Big)^3$ (當且僅當 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 取等號)

在此推廣並予以證明: 若 $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \ge 3$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = s_n$, $s_n \le m \le 1$, 則

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{m-x_i} - x_i\Big) \ge \Big(\frac{n}{nm-s_n} - \frac{s_n}{n}\Big)^n。$$

證明: (1) 當 $n=3$ 時, 設 $m-x_1=x$, $m-x_2=y$, $m-x_3=z$, 則 $x_1=m-x$, $x_2=m-y$, $x_3=m-z$。因爲 $x_1+x_2+x_3=s_3$, 所以 $x+y+z=3m-s_3$。

$$\begin{aligned}\sum_{cyclic} x(x-m) = \sum_{cyclic}(x^2 - xm) &= \sum_{cyclic} x^2 - m\sum_{cyclic} x \\ &= \Big(\sum_{cyclic} x\Big)^2 - 2\sum_{cyclic} xy - m(3m-s_3) \\ &= (3m-s_3)^2 - m(3m-s_3) - 2\sum_{cyclic} xy;\end{aligned}$$

$$(x-m)(y-m)(z-m) = xyz - m\sum_{cyclic} xy + m^2(2m-s_3);$$

$$\sum_{cyclic} xy(x-m)(y-m) = \sum_{cyclic} x^2y^2 - m\sum_{cyclic} xy(x+y) + m^2\sum_{cyclic} xy$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{cyclic} x^2y^2 - m\sum_{cyclic} xy(3m-s_3-z) + m^2\sum_{cyclic} xy \\
&= \sum_{cyclic} x^2y^2 + m(s_3-2m^2)\sum_{cyclic} xy + m\sum_{cyclic} xyz \\
&= 3mxyz + \sum_{cyclic} x^2y^2 + m(s_3-2m^2)\sum_{cyclic} xy;
\end{aligned}
$$

據 Cauchy 不等式, 得 $\sum\limits_{cyclic}\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{9}{3m-s_3}$; 據算幾何不等式, 得 $\sum\limits_{cyclic}\dfrac{xy}{z} \geq 3(xyz)^{\frac{1}{3}}$ 以及 $\sum\limits_{cyclic} xy = xy+yz+zx \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 + z(x+y) = \dfrac{1}{4}(3m-s_3-z)(3m-s_3+3z)$ $= \dfrac{1}{12}(9m-3s_3-3z)(3m-s_3+3z) \leq \dfrac{(3m-s_3)^2}{3}$。於是,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{m-x_1}-x_1\right)\left(\frac{1}{m-x_2}-x_2\right)\left(\frac{1}{m-x_3}-x_3\right) \\
&= \left(\frac{1}{x}+x-m\right)\left(\frac{1}{y}+y-m\right)\left(\frac{1}{z}+z-m\right) \\
&= \frac{1+\sum\limits_{cyclic} x(x-m) + \sum\limits_{cyclic} xy(x-m)(y-m)}{xyz} + (x-m)(y-m)(z-m) \\
&= \frac{1+6m^2+s_3^2-5ms_3}{xyz} + \sum_{cyclic}\frac{xy}{z} + (ms_3-2m^2-2)\sum_{cyclic}\frac{1}{x} + xyz \\
&\quad -m\sum_{cyclic} xy + m^2(2m-s_3) + 3m \\
&\geq \frac{1+6m^2+s_3^2-5ms_3}{xyz} + 3(xyz)^{\frac{1}{3}} + \frac{9(ms_3-2m^2-2)}{3m-s_3} + xyz \\
&\quad -\frac{m(3m-s_3)^2}{3} + m^2(2m-s_3) + 3m
\end{aligned}
$$

設

$$
\begin{aligned}
G(\vartheta) &= \frac{1+6m^2+s_3^2-5ms_3}{\vartheta} + 3\vartheta^{\frac{1}{3}} + \frac{9(ms_3-2m^2-2)}{3m-s_3} + \vartheta - \frac{m(3m-s_3)^2}{3} \\
&\quad +m^2(2m-s_3) + 3m
\end{aligned}
$$

且 $\vartheta \leq \left(\dfrac{3m-s_3}{3}\right)^3$, 則 $G'(\vartheta) = -\dfrac{1+6m^2+s_3^2-5ms_3}{\vartheta^2} + \dfrac{1}{\vartheta^{\frac{2}{3}}} + 1$。

因為 $0 < s_3 \leq m \leq 1$, 所以 $1+6m^2+s_3^2-5ms_3 > 0$。因此, $G'(\vartheta)$ 在 $0 < \vartheta \leq \left(\dfrac{3m-s_3}{3}\right)^3$ 為單調遞增函數。

於是, $G'(0) < G'(\vartheta) \leq G'\left(\left(\dfrac{3m-s_3}{3}\right)^3\right) < 0$。

所以, $G(\vartheta)\ge G\Big(\Big(\dfrac{3m-s_3}{3}\Big)^3\Big)=\Big(\dfrac{3}{3m-s_3}-\dfrac{s_3}{3}\Big)^3$,

因此, 不等式 $\prod\limits_{i=1}^{3}\Big(\dfrac{1}{m-x_i}-x_i\Big)\ge\Big(\dfrac{3}{3m-s_3}-\dfrac{s_3}{3}\Big)^3$ 成立。

(2) 假設 $n=k$ 時, 不等式成立。即在 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=s_k$ 時, 有 $\prod\limits_{i=1}^{k}\Big(\dfrac{1}{m-x_i}-x_i\Big)\ge\Big(\dfrac{k}{mk-s_k}-\dfrac{s_k}{k}\Big)^k$, 則當 $n=k+1$ 時, 在滿足條件 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}x_i=s_{k+1}$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=s_{k+1}-x_{k+1}$, 由假設知

$$\prod_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{m-x_i}-x_i\Big)\ge\Big(\frac{1}{m-x_{k+1}}-x_{k+1}\Big)\Big(\frac{k}{mk-(s_{k+1}-x_{k+1})}-\frac{s_{k+1}-x_{k+1}}{k}\Big)^k.$$

設 $f(x)=\Big(\dfrac{1}{m-x}-x\Big)\Big(\dfrac{k}{mk-s_{k+1}+x}-\dfrac{s_{k+1}-x}{k}\Big)^k$, $x\in(0,m)$。則

$$f'(x)=\Big(\frac{k}{mk-s_{k+1}+x}-\frac{s_{k+1}-x}{k}\Big)^{k-1}\cdot\Bigg\{\Big(\frac{1}{(m-x)^2}-1\Big)\Big(\frac{1}{m-\frac{s_{k+1}-x}{k}}-\frac{s_{k+1}-x}{k}\Big)$$
$$-\Big(\frac{1}{m-x}-x\Big)\Bigg(\frac{1}{\Big(m-\frac{s_{k+1}-x}{k}\Big)^2}-1\Bigg)\Bigg\}。$$

設 $f'(x)=0$ 可得方程

$$\frac{(m-x)^{-2}-1}{(m-x)^{-1}-x}=\frac{\Big(m-\frac{s_{k+1}-x}{k}\Big)^2-1}{\Big(m-\frac{s_{k+1}-x}{k}\Big)^{-1}-\frac{s_{k+1}-x}{k}}。\tag{15}$$

通過觀察, 易知 $x=\dfrac{s_{k+1}}{k+1}$ 爲 (15) 的一根。下面我們特地證明 $x=\dfrac{s_{k+1}}{k+1}$ 爲 (15) 唯一的根。

因爲 $x\in(0,s_{k+1})$ $(0<s_{k+1}\le m\le 1)$, 所以 $\dfrac{m-x}{k}\in(0,\dfrac{s_{k+1}}{k})$ $(0<s_{k+1}\le m\le 1)$。

設函數 $g(x)=\dfrac{(m-x)^{-2}-1}{(m-x)^{-1}-x}$ 且 $x_1=x$, $x_2=\dfrac{s_{k+1}-x}{k}$, 則有 $g(x_1)=g(x_2)$。欲使 (15) 的解具有唯一性, 則函數 $g(x)$ 必然是單調函數。也就是說, 函數 $g(x)$ 的定義域必然是函數本身的單調遞減區間或單調遞增區間的子集。既然使函數 $g(x)$ 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 都有定義且 $g(x_1)=g(x_2)$, 所以必須 $x_1=x_2$。即 $g(x)$ 的定義域爲 $\Big(0,\dfrac{s_{k+1}}{k}\Big)$。

設 $t=m-x$, $t\in\Big(m-\dfrac{s_{k+1}}{k},m\Big)$ 則

$$g(x)=\frac{t^{-1}-t}{\Big(t-\dfrac{m}{2}\Big)^2+1-\dfrac{m^2}{4}}=\hat{g}(t)。$$

根據複合函數的單調性的性質“對於值域皆爲正值且皆爲單調遞減函數的兩個函數的乘積形成的新的函數爲單調遞減函數” 以及 $0<s_n\le m\le 1$, 易知, $\hat{g}(t)$ 在 $t\in\Big(\dfrac{m}{2},+\infty\Big)$ 單調遞減, 又考慮到其定義域 $\Big(m-\dfrac{s_{k+1}}{k},m\Big)$, 故 $\dfrac{m}{2}<m-\dfrac{s_{k+1}}{k}$。即 $k>2$ (與已知的 $k\ge 3$ 相符)

於是, $g(x)$ 在定義域內爲單調遞增函數。
因此, 函數 $f(x)$ 單調遞減區間爲 $x\in\Big(0,\dfrac{s_{k+1}}{k+1}\Big)$, 單調遞增區間爲 $x\in\Big(\dfrac{s_{k+1}}{k+1},s_{k+1}\Big)$。故

$$f(x)\ge f\bigg(\frac{s_{k+1}}{k+1}\bigg)=\bigg(\frac{k+1}{m(k+1)-s_{k+1}}-\frac{s_{k+1}}{k+1}\bigg)^{k+1}。$$

$$\prod_{i=1}^{k+1}\bigg(\frac{1}{m-x_i}-x_i\bigg)\ge\bigg(\frac{k+1}{m(k+1)-s_k}-\frac{s_{k+1}}{k+1}\bigg)^{k+1}。$$

綜合 (1), (2) 知不等式

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{m-x_i}-x_i\Big)\ge\Big(\frac{n}{nm-s_n}-\frac{s_n}{n}\Big)^n$$

成立。

從以上列舉的例題可以看出, 這種方法在證明不等式時需要求一個高階多項式的根, 例如方程 (12) 、(14) 、(15)。認眞觀察這三個方程, 易得共同的特點是: 對稱。如果設方程的左端爲 $\xi(x)$ 那麼其右端爲 $\xi\Big(\dfrac{m-x}{k}\Big)$, 然後, 如前文所述, 得出方程的唯一的根。此法在求解高階多項式的根時, 並沒有運用求高階方程的現有的公式, 只是依據函數關係式的對稱性而已。

5. 結束語:

“微分 — 數歸法”是一種專門證明一些條件不等式的新的方法。從本文列舉的實例我們可以看出, 這種方法應用方便, 無須引理, 思維自然流暢, 簡潔優美, 特別是在由假設到目標的過渡中; 但是我們必須還注意到應用的前提條件是由假設到預期的不等式的獲證必須保證相對變量的唯一性, 否則, 一旦出現多元變量, 問題就變得複雜和頗有難度。獨木難以成林。欲使此法應用更加廣泛, 還需同行共同努力。

參考文獻

1. D. S. 密特利諾維奇, 解析不等式, 北京: 科學出版社, 1987。
2. 匡繼昌, 常用不等式, 濟南: 山東科學技術出版社, 2003。

—本文作者任教陝西省西安東方中學—