數學傳播　33卷4期, pp. 63-66

利用平面的法向量 來求兩歪斜線的公垂線段的兩端點座標

李維昌

研究目的: 試圖以另類的方法來探求兩歪斜線的公垂線段的兩端點座標。

研究過程:

已知空間直角座標系中, O 爲原點, 兩歪斜線 L_1 與 L_2 分別通過點 A_1、點 A_2, L_1 與 L_2 的方向向量分別爲 $\overrightarrow{d_1}$ 與 $\overrightarrow{d_2}$, 試求 L_1 與公垂線的交點 B_1 及 L_2 與公垂線的交點 B_2 的座標。

一、L_2 與公垂線的交點 B_2 的求法:

1. 過 L_1 與 B_2 的平面 E_1 的法向量平行 $\overrightarrow{n_1}=\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2\overrightarrow{d_2}-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\overrightarrow{d_1}$。

證明: $\because\ \overrightarrow{B_2B_1}\cdot\overrightarrow{d}_1=0$ 且 $\overrightarrow{B_2B_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=0$,

$$\begin{aligned}\therefore\ &\left[\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2\overrightarrow{d_2}-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\overrightarrow{d_1}\right]\cdot\overrightarrow{B_2B_1}\\ &=\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{B_2B_1})-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{B_2B_1})=0\end{aligned}$$

又 $\left[\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2\overrightarrow{d_2}-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\overrightarrow{d_1}\right]\cdot\overrightarrow{d_1}$

$$=\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_1})-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2=0$$

因此 $\overrightarrow{n_1}=\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2\overrightarrow{d_2}-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\overrightarrow{d_1}$ 平行平面 E_1 的法向量。

2. $\because B_2$ 與 A_1 在平面 E_1 上 $\therefore\ \overrightarrow{A_1B_2}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\Rightarrow(\overrightarrow{A_2B_2}-\overrightarrow{A_2A_1})\cdot\overrightarrow{n_1}=0$。
設 $\overrightarrow{A_2B_2}=t_2\overrightarrow{d_2}$, 因此 $t_2\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{n_1}$,

$$\text{解得}\quad t_2=\frac{\overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{n_1}}{\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{n_1}}=\frac{\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_1})-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_1})}{\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})^2}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}。$$

3. 設 $\Delta=\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}$ 且 $\Delta_{t_2}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\end{vmatrix}$,

$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OA_2}+t_2\overrightarrow{d_2}$,

$$t_2=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}=\frac{\Delta_{t_2}}{\Delta}。$$

二、L_1 與公垂線的交點 B_1 的求法:

4. 過 L_2 與 B_1 的平面 E_2 的法向量平行 $\overrightarrow{n_2}=\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2\overrightarrow{d_1}-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\overrightarrow{d_2}$。

證明: $\because\ \overrightarrow{B_2B_1}\cdot\overrightarrow{d_1}=0$ 且 $\overrightarrow{B_2B_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=0$,

$$\therefore\ \left[\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2\overrightarrow{d_1}-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\overrightarrow{d_2}\right]\cdot\overrightarrow{B_2B_1}$$
$$=\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{B_2B_1})-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{B_2B_1})=0。$$

又 $\left[\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2\overrightarrow{d_1}-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\overrightarrow{d_2}\right]\cdot\overrightarrow{d_2}$

$$=\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2=0。$$

因此 $\overrightarrow{n_2}=\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2\overrightarrow{d_1}-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})\overrightarrow{d_2}$ 平行平面 E_2 的法向量。

5. $\because B_1$ 與 A_2 在平面 E_2 上 $\therefore\ \overrightarrow{A_2B_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\Rightarrow(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A_2})\cdot\overrightarrow{n_2}=0$。
設 $\overrightarrow{A_1B_1}=t_1\overrightarrow{d_1}$, 因此 $t_1\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{n_2}$,

$$\text{解得}\quad t_1=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}$$
$$=\frac{\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_1A_2})-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2})}{\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2-(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2})^2}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}。$$

6\. 設 $\Delta=\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}$ 且 $\Delta_{t_1}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}$,

$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OA_1}+t_1\overrightarrow{d_1}$,

$$t_1=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}=\frac{\Delta_{t_1}}{\Delta}。$$

三、結論:

設 $\Delta=\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}$, $\Delta_{t_1}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}$,

$\Delta_{t_2}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\end{vmatrix}$。

1\. $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OA_1}+t_1\overrightarrow{d_1}=\overrightarrow{OA_1}+\frac{\Delta_{t_1}}{\Delta}\overrightarrow{d_1}$,

2\. $\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OA_2}+t_2\overrightarrow{d_2}=\overrightarrow{OA_2}+\frac{\Delta_{t_2}}{\Delta}\overrightarrow{d_2}$。

四、實際應用:

空間二歪斜線: $L_1:\ \frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+7}{-1}$, $L_2:\ \frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-6}{-2}$, $\overrightarrow{d_1}=(4,-3-1)$, $\overrightarrow{d_2}=(3,-4,-2)$, $\overrightarrow{OA_1}=(11,-5,-7)$, $\overrightarrow{OA_2}=(-5,4,6)$, O 爲空間直角坐標系的原點, $\overrightarrow{A_1A_2}=(-16,9,13)$。試求:

(1) L_1 與公垂線的交點 B_1。

(2) L_2 與公垂線的交點 B_2。

解: $\Delta=\begin{vmatrix}26&26\\26&29\end{vmatrix}$, $\Delta_{t_1}=\begin{vmatrix}(-16,9,13)\cdot(4,-3,-1)&26\\(-16,9,13)\cdot(3,-4,-2)&29\end{vmatrix}$,

$$\Delta_{t_2}=\begin{vmatrix}26&(4,-3,-1)\cdot(16,-9,-13)\\26&(3,-4,-2)\cdot(16,-9,-13)\end{vmatrix}$$

$$t_1=\frac{\begin{vmatrix}-104&26\\-110&29\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}26&26\\26&29\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-52&26\\-52&29\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}26&26\\26&29\end{vmatrix}}=-2,\quad t_2=\frac{\begin{vmatrix}26&104\\26&110\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}26&26\\26&29\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}26&52\\26&58\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}26&26\\26&29\end{vmatrix}}=2,$$

$\overrightarrow{OB_1}=(11,-5,-7)+(-2)\cdot(4,-3,-1)=(3,1,-5)$,
$\overrightarrow{OB_2}=(-5,4,6)+2\cdot(3,-4,-2)=(1,-4,2)$。

—本文作者任教國立宜蘭高中—