

談一道美國大學生數學競賽題

蘇化明 · 潘傑

摘要: 給出了美國普特南大學生數學競賽一道試題的一般形式並對相關問題進行了討論。

關鍵詞: 數學競賽、不等式、單調性、最小值、一致收斂。

第 63 屆 (2002 年) 美國大學生數學競賽 (The William Lowell Putnam Mathematical Competition) 試題的 B3 題 (可見 [1]) 是:

設整數 $n > 1$, 證明

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}. \quad (1)$$

文 [1] 給出了 (1) 的一種解法, 文 [2] 利用級數方法給出了 (1) 的又一種證法, 本文首先給出 (1) 的另外一種證法, 然後再討論與 (1) 相關的問題。

由於不等式 $\frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}$ 等價於

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} > 0, \quad (2)$$

而不等式 $\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 等價於

$$\frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} > 0. \quad (3)$$

由於 $n > 1$, 若令 $x = \frac{1}{n}$, 因而只要證明, 當 $0 < x < 1$ 時,

$$f(x) = (1-x) \ln(1-x) + x > 0, \quad (4)$$

$$g(x) = x \ln \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \ln(1-x) - x > 0. \quad (5)$$

因爲 $f'(x) = -\ln(1-x) > 0$ ($0 < x < 1$), 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上單調遞增。又 $f(0) = 0$, 故當 $0 < x < 1$ 時, $f(x) > f(0) = 0$, 因此

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} > 0, \quad (2)$$

因爲 $g'(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2-x} + \frac{1}{1-x} - 1$ ($0 < x < 1$),

$$g''(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{2}{(2-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x(x^2 - 5x + 5)}{(2-x)^2(1-x)^2} > 0 \quad (0 < x < 1),$$

所以 $g'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上單調遞增, 又 $g'(0) = 0$, 故當 $0 < x < 1$ 時 $g'(x) > g'(0) = 0$, 從而當 $0 < x < 1$ 時, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上單調遞增, 而 $g(0) = 0$, 故當 $0 < x < 1$ 時, $g(x) > g(0) = 0$, 因此

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} > 0. \quad (3)$$

由 (2), (3) 知不等式 (1) 成立。

衆所周知, 數列 $\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 單調遞增收斂於 $\frac{1}{e}$, 所以不等式 (1) 實質上是給出了 $\frac{1}{e}$ 與 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 之差的一種估計。又由於數列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 單調遞增收斂於 e , 因而我們自然地聯想到應該存在 e 與 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 之差的估計式。事實上, 我們可以在更廣的範圍內討論這些問題, 相關結論以定理形式陳述如下。

定理 1: 設整數 $n > 1$, t 爲實數且 $0 < t \leq 2$, 則有

$$\frac{t^2}{2n} e^{-t} < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{n} e^{-t}. \quad (6)$$

定理 2: 設整數 $n > 1$, t 爲實數且 $1 \leq t \leq 2$, 則有

$$\frac{t}{2n+2} e^t < e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n+1} e^t. \quad (7)$$

註: 據作者所知, 對 $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ 的單邊估計已有結果是:

若 a 和 t 是實數, $a \geq 1$ 且 $|t| \leq a$, 則有

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{a}\right)^a \leq \frac{t^2}{a} e^{-t}; \quad (8)$$

若整數 $n > 1$, t 為實數且 $0 \leq t \leq n$, 則有

$$\frac{t^2}{n^2}e^{-t} \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n. \quad (9)$$

(8), (9) 可分別見 [3], [4]。

對 $e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ 的單邊估計已有結果是 (可見 [5]):

若 n 為自然數且實數 $t > 0$, 則有

$$e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}e^t. \quad (10)$$

定理 1 的證明:

不等式

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{n}e^{-t} \quad (11)$$

等價於

$$\frac{t^2}{n} + e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n > 1. \quad (12)$$

當 $0 < t \leq n$ 時, 易知 $e^{\frac{t}{n}} > 1 + \frac{t}{n}$, 從而

$$e^t > \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n, \quad e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n.$$

由著名的 Bernoulli 不等式 (可見 [6]) 知

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{t^2}{n},$$

故 $e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n > 1 - \frac{t^2}{n}$,

由 $n > 1$, 所以當 $0 < t \leq 2$ 時,

$$\frac{t^2}{n} + e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n > 1. \quad (12)$$

不等式 (12) 也可用下面的方法證明。

令 $f(t) = \frac{t^2}{n} + e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ ($0 \leq t \leq n$), 則

$$f'(t) = \frac{t}{n} \left[2 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \right],$$

解 $f'(t) = 0$ 可求得函數 $f(t)$ 在 $(0, n)$ 內的穩定點為 t_0 , 由此知

$$e^{t_0} \left(1 - \frac{t_0}{n}\right)^{n-1} = 2,$$

於是

$$f(t_0) = \frac{t_0^2}{n} + 2 \left(1 - \frac{t_0}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[(t_0 - 1)^2 + 2n - 1 \right] \geq 2 - \frac{1}{n} > 1.$$

又 $f(0) = 1$, $f(n) = n$, 故連續函數 $f(t)$ 在 $[0, n]$ 上的最小值為 1, 所以當 $0 < t \leq 2$ 時, 不等式 (12) 成立, 因而不等式 (11) 成立。

不等式

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n > \frac{t^2}{2n} e^{-t}, \quad (13)$$

等價於 $e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < 1 - \frac{t^2}{2n}$, 或

$$\ln \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) - t - n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) > 0. \quad (14)$$

令 $g(t) = \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) - t - n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right)$ ($0 < t < 2$), 則

$$g'(t) = -\frac{2t}{2n - t^2} - 1 + \frac{n}{n - t} = \frac{t^2(2 - t)}{(2n - t^2)(n - t)}.$$

由於 $n \geq 2$, 所以當 $0 < t < 2$ 時, $g'(t) > 0$, 從而 $g(t)$ 在 $[0, 2]$ 上單調遞增, 又 $g(0) = 0$, 所以 $g(t) > g(0) = 0$ 從而當 $0 < t < 2$ 時, 不等式 (14) 成立。

又數列 $\left\{ \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-1} \right\}$ 單調遞減收斂於 e^{-2} , 故 $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-1} < e^{-2}$, 從而當 $t = 2$ 時不等式 (13) 也成立。因此當 $0 < t \leq 2$ 時不等式 (13) 成立。

由不等式 (11), (13) 知不等式 (6) 成立。特別在定理 1 中取 $t = 1$ 即可得到不等式 (1)。

定理 2 的證明:

當 $t = 1$ 時, 不等式 (7) 為

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}, \quad (15)$$

此為文 [7] 的已有結果, 故不等式 (7) 當 $t = 1$ 時成立。

不等式

$$e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n+1} e^t \quad (16)$$

等價於

$$e^t \left(1 - \frac{t^2}{2n+1}\right) < \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

或

$$n \ln \left(1 + \frac{t}{n}\right) - t - \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n+1}\right) > 0. \quad (17)$$

令 $p(t) = n \ln \left(1 + \frac{t}{n}\right) - t - \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n+1}\right)$ ($1 \leq t \leq 2$), 則

$$p'(t) = \frac{n}{n+t} - 1 + \frac{2t}{2n+1-t^2} = \frac{t(t^2+2t-1)}{(2n+1-t^2)(n+t)}.$$

由於 $n \geq 2$, 故當 $1 \leq t \leq 2$ 時, $p'(t) > 0$, 從而 $p(t)$ 在 $[1, 2]$ 上單調遞增, 又由 (15) 知 $p(1) > 0$, 所以 $p(t) > p(1) > 0$, 故當 $1 \leq t \leq 2$ 時不等式 (17) 成立, 從而不等式 (16) 成立。

不等式

$$e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n > \frac{t}{2n+2} e^t \quad (18)$$

等價於

$$e^t \left(1 - \frac{t}{2n+2}\right) < \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

或

$$t + \ln \left(1 - \frac{t}{2n+2}\right) - n \ln \left(1 + \frac{t}{n}\right) > 0. \quad (19)$$

令 $q(t) = t + \ln \left(1 - \frac{t}{2n+2}\right) - n \ln \left(1 + \frac{t}{n}\right)$ ($1 \leq t \leq 2$), 則

$$q'(t) = 1 - \frac{1}{2n+2-t} - \frac{n}{n+t} = \frac{2nt+t-t^2-n}{(n+t)(2n+2-t)}.$$

因為分子 $> nt + t - t^2 - n = (t-1)(n-t) \geq 0$, 又 $n \geq 2$, 所以當 $1 \leq t \leq 2$ 時 $q'(t) > 0$, 從而 $q(t)$ 在 $[1, 2]$ 上單調遞增。又由 (15) 知 $q(1) > 0$, 所以 $q(t) > q(1) > 0$, 故當 $1 \leq t \leq 2$ 時不等式 (19) 成立, 從而不等式 (18) 成立。

由不等式 (16)、(18) 知不等式 (7) 成立。

最後, 我們僅舉兩例說明定理 1、定理 2 的應用。

例 1: 證明: 函數項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right]$ 在 $[0, 1]$ 上一致收斂。

證: 將定理 1 中的 t 換成 x , 可知, 當整數 $n > 1$, x 為實數且 $0 < x \leq 2$ 時,

$$\frac{x^2}{2n}e^{-x} \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < \frac{x^2}{n^2}e^{-x}. \quad (20)$$

當 $x = 0$ 時 (20) 式右端不等式等號成立, 故由 (20) 式知, 對任意的 $x \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{n} \left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right] \leq \frac{x^2}{n^2} e^{-x} \leq \frac{1}{n^2}.$$

由於數項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂, 故由函數項級數一致收斂的 Weierstrass 判別法知級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right] \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上一致收斂。}$$

註: 由於 (6) 式右端不等式當 $0 \leq t \leq n$ 時也成立, 故對 $\forall b > a \geq 0$ ($b \leq n$), 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right]$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂。

例 2: 證明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \begin{cases} 0, & \alpha < 1, \\ \frac{e}{2} & \alpha = 1. \end{cases}$$

證: 由 (7) [或 (15)] 知

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1},$$

所以當 $\alpha < 1$ 時, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = 0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \frac{e}{2}$, 因而原命題成立。

感謝審稿人提出的寶貴意見。

參考文獻

1. The Sixty-third William Lowell Putnam Mathematical Competition, The Amer. Math. Monthly, Vol. 110, No. 9, pp.720-726, 2003.
2. 舒陽春, 高等數學中的若干問題解析, 科學出版社, 北京, 2005.
3. D. S. Mitrinović, P. M. Vasić 著, 趙漢賓譯, 分析不等式, 廣西人民出版社, 南寧, 1986.
4. 周民強, 數學分析習題演練 (第一冊), 科學出版社, 北京, 2006.
5. 謝惠民等, 數學分析習題講義 (下冊), 高等教育出版社, 北京, 2004.
6. G. H. 哈代等著, 越民義譯, 不等式, 科學出版社, 北京, 1965.
7. G. 波利亞, G. 舍貴著, 張奠宙等譯, 數學分析中的問題和定理 (第一卷), 上海科學技術出版社, 上海, 1981.