

如何教出數學專家

一 由專家心智看如何培養數學專家

史美奐

在科學人雜誌第 55 期 (2006 年 9 月號) 的主題文章「邁向專家心智之路」, 及沈君山先生、曾志朗先生「探索專家的心智」的討論文中, 都介紹到科學界嘗試研究專家的能力從何而來的過程。文中介紹了心理學家藉由研究西洋棋大師的思路, 來瞭解人類如何在專業領域內成為專家。在這兩篇文章中, 有許多可供教育工作者參考的訊息, 其中棋士用來鍛鍊技巧的方式, 有許多值得借鏡之處, 可為教育人員考慮運用於教學中。以下將簡單的介紹該文, 並提出個人試著將之運用於數學教學的淺見。

為什麼是西洋棋大師

許多領域都有專家, 但是很難說出那些人是這個領域中最頂尖的專家, 到底是誰比較厲害? 他在哪些方面是比較優秀? 他的學習歷程是否可以被其他人所學習複製? ... 這些問題都很難回答, 因為它太難測量, 也很難具體說明一位專家的能力為何? 譬如說: 高中數學老師與國小數學老師誰比較厲害, 是要比誰較會安撫學生嗎? 或是誰的班級管理能力比較強? 還是誰較能清楚的解釋加法是什麼? 或是誰能解出較多的數學題目? 到底誰才是數學專家? 有趣的是, 許多有名的數學家卻是提問了一個當時無法解決的猜想而聞名於後世。

但西洋棋的棋技卻可以測量, 它不但可以把棋步分解進行分析, 還可以個別的進行實驗測試, 也很容易在自然環境 (比賽廳) 中觀察。正如此西洋棋成了檢驗思考理論的最佳單項實驗, 有人稱之為「認知科學的果蠅」(p.52)*。

此外, 西洋棋士間常辦理比賽, 學者可以統計每位棋士的積分, 不但可以測量他最近與先前的表現, 還可以根據對手的積分來預測勝局的機率, 並且出奇地準確。研究者發現: 如果甲選手的評分比乙選手的分數高 200 分, 甲選手就有 75% 的勝率, 不論是一般選手或是排名最前

*科學人雜誌第 55 期頁碼, 以下均同。

面的選手都一樣準確。……此外，最令心理學家想探知的原因是西洋棋大師下盲棋的表現，如果能瞭解這種複雜結構的知識，就可以解釋下盲棋及計算棋步與計畫策略的認知狀況 (p.52)*。

是故，許多心理學家試圖以西洋棋來分析何謂專家及如何培養專家，希望能經由這些研究來了解大腦如何思考。

大師與一般人的不同之處

1894 年，法國心理學家比奈 (Alfred Binet) 要西洋棋大師描述他們如何下盲棋，原本他以為大師是運用腦中幾近真實的棋盤影像，但不久就了解到，這些西洋棋大師在下盲棋時，所運用的東西其實更為抽象的。大師們看到的是棋子與棋子之間的相對位置，所以西洋棋大師或許不記得士兵的確實位置，但他可以從典型的開局策略開始，推算出士兵目前應該出現的位置；或者大師可以記得之前的棋步，然後運用邏輯來推敲出它現在的位置，運用有組織的連結系統，來重建特定的細節。所以若我們也擁有大師般的結構知識，不僅可以下盲棋，也可以像大師一樣計算棋步與計畫策略，但大師們所擁有的是天生的才能，還是他經歷了足夠的特殊專業訓練呢 (p.52)*?

1909 年，古巴西洋棋王帕布蘭卡 (José Raúl Capablanca) 在一場表演賽中，一人獨自對數十位業餘棋士。他在棋桌圍成的圈子內走著，依序看每個棋盤兩、三秒之後，就下了一步，而外圍的業餘棋士則等棋王在所有棋盤都下了一步之後，開始回應棋步。想知道比賽的結果嗎？竟然是一面倒，棋王贏了全部的廿八局。旁人問棋王怎麼能下得這麼快又這麼好？在這麼短的時間內，他能想幾步棋呢？棋王的回答是：「我每次只會想一步棋，但總是正確的一步。」(p.50)*。

這一句話，正是心理學家研究了一世紀才得到的結果：西洋棋大師比新手強的地方，主要在最初幾秒的思考。這種知識導向的快速感知 (perception) 能力，或稱為統覺 (apperception)，在各個領域的專家身上都看得到 (p.50)*。

意即專家考慮的不是更多的解決方法，而是更好的方法；有經驗的專家偶爾會考慮較多的可能性，但他較常依靠的是由結構性知識所內化的直覺判斷，而非分析能力。

所以在教學現場中，也常看一個數學不好的學生在面對題目時，可能會考慮良久，往往想了很多方法，卻又錯失了可以把題目解出來的方法，到最後只覺題目處處充滿玄機，而始終解不出來；相對的，數學專家在面對題目時，最初的幾秒就會思考出一個可以找到正確答案的方法，接下來才是考慮要不要再進一步去尋找一個更好的方法（一般數學思考的程序亦是先確定這問題有解，多半是由試試看有沒有特殊解來著手，若可以找出一個解，就會再進一步看是否可找出公式解，最後，再思考這個結果可以運用在什麼地方。同時，一個數學專家即使解不出來這個問題，仍會持續地測試各種不同解題策略，而非放棄。）。不過，現在數學教育最大的危機就是學生根本就放棄學習數學，若學生連想都不肯想，那代表數學教育最大的失敗。事實上，若各級考試

中不考數學，不知道還剩多少學生想唸課本所教的數學，不考數學的情形雖然不致於發生，但我們仍必須不斷思索數學教育到底要帶給學生什麼東西！

大師的大腦在做什麼

在 1938 年，荷蘭心理學家兼西洋棋大師德葛魯特 (Adriaande Groot) 做了一個實驗，他讓受測者檢視一盤棋局一小段時間後，要他們憑記憶將棋局重新排出來。發現初學者即使是看了三十秒後，還是只記得極少數的棋子的位置，但特級大師只看了幾秒鐘，就可以正確無誤地排出棋局。這種差異代表某種特殊的記憶，專責記憶棋賽中棋子經常出現的位置。為什麼可以確定這是訓練的結果而非天生的才能，因為在另一個一般的記憶測試中，西洋棋大師在記憶上並沒有比一般人來得好 (p.52-54)*。

而後，在 1960 年代，美國卡內基美倫大學的賽門 (Herbert A. Simon) 與蔡斯 (William Chase) 想從記憶力的局限來探討專家的記憶。他們延續德葛魯特的工作，要求不同等級的選手憑記憶排出人工設計的隨機棋局，而非經典的棋賽棋局，結果選手的棋技與記憶之間的相關性就降低了很多。可見，記憶的領域是非常有局限性的，大師較強的記憶力不只是只局限於西洋棋上，還必須是典型的棋局。這個研究再次支持「某個領域的能力不能直接轉用到另一個領域」的看法 (p.54)*。

意即學好拉丁文不一定能讓我們英語進步，而學好幾何證明也不見得能教會我們日常生活中的邏輯，各種知識必須適當地加以轉化，才能利用在其他領域。

可能的是專家主要依靠的是結構性知識所內化的直覺判斷 (最初數秒觀察棋局的結果)，而不純是分析能力 (看出有多少可能的棋步而非只有最好的一步)。所以若想訓練學生成為解題專家，我們應當讓學生不只具有分析題目的能力，更應當讓學生去學習數學的結構性知識，才能學習並內化這個題目所需的知識與方法，那麼下一次遇到這個題型時，可以迅速的分辨出這個問題的類型，而直接以正確的方法把答案解出來。由此觀點，所謂的模擬考及反覆練習，確實對拿高分是有幫助的，因為他反覆練習分辨題目的能力，所以可以更快的找出正確的解法。不過，在反覆練習之前，他必須內化足夠的結構性知識，如此，當他在做練習時，才有能力不只是看這個解法的過程，而是更進一步去分辨這個問題的類型，如此才得以成為解題專家。

大師的記憶方式

而後，賽門試著利用意元集組 (chunk) 來解釋大師何以無法重建人工隨機的樣式，並依此解釋大師如何能超越工作記憶的負荷而大量儲存資訊。因為美國普林斯頓大學的心理學者米勒 (George Miller) 在 1956 年發表了一篇著名的論文「神奇數字 7 加減 2」，估計了工作記憶

的極限，也就是人們一次只能思考 5~9 個項目。但是若依賽門的概念將資訊分級組裝成意元集組之後，就可以克服這個極限，變成可以處理 5~9 個集組，而非同樣數目的小部分了。所以大師的記憶可能存在許多棋局的意元集組，而可以用這些意元集組來組合記憶其他棋局 (p.54)*。特級大師會將棋局排設成許多種組合，如：「主教在王側騎士之前、王短移位」及「中央壅塞的古印度式防禦」，因而將整盤棋壓縮成五、六個集組 (p.61)*。

此外，一般人在受到干擾時，其暫時的工作記憶會受到影響，而無法繼續原先做到一半的動作，例如：原本要打電話而暫時記憶的電話號碼，因為被人一喊之後就忘了，又要重看一次。但專家在受到干擾後，還是可以接續原來工作而完成任務。例如：醫師顯然會將資訊貯存在長期記憶中，然後提取出來幫助診斷病情，即使他被病人一直打斷，但通常不影響他對病情的判斷。閱讀也是一樣，閱讀能力極佳的讀者被打斷時，都幾乎可以毫不遲疑地繼續閱讀下去。可見專家解決問題的過程已經變得自動化，他腦部資源花得比較少，也不需要研究如何才能完成工作，但生手就必須在腦裡面動用很多迴路去尋找事情的相關性 (p.61)*。

在 2001 年的一篇論文中指出，研究人員在受測者與電腦對弈時，利用腦磁圖來測量腦中電流產生的磁場變化。實力較弱的選手，腦中的顳葉的活性要比額葉皮質與頂葉皮質的活性高，這意謂著業餘棋手正在分析不尋常的新棋步。但特級大師的額葉皮質與頂葉皮質就比較活躍，顯示正從長期記憶擷取資訊。這種特定領域主題的記憶能力，很明顯就是專家存在的標準 (p.54)*。

英國倫敦布魯內爾大學的哥貝特 (Fernand Gobet) 在 1990 年代與賽門合作，提出了另一個相抗衡的理論。他們將特殊的大型樣式納入意元集組，使得意元集組的概念加以延伸成模板 (template)，這樣的模板上，會有許多可變代的插槽，讓大師用來安插士兵或主教，而產生各種置換某處的變化，所以大師可以記得某一個棋局，與現在這盤棋，只有在某幾個地方有所不同 (p.61)*。

同樣的，是否一個數學專家在解題時，不只看到题目的某個細節，而是他能分辨出這個問題屬於那幾個集組，經由分辨出它所屬的章節、適用的公式與定理，直接看出某個正確的解法。而初學者在看問題時，可能會將題目視為有許多可能的線索，而不知循那個線索來解題。但專家會將某一部分的特徵分辨出來，再針對於這個章節的题目，迅速提取出對應的記憶知識，知道有那些可能適用的公式及解法，接著再以解題方向與綱要來判別這個問題的解法是否可能。若是题目的敘述做了某些變化，對初學者而言，他可能就看不懂题目的敘述，而不知如何去解題，但專家仍然可以分辨出它的題型，因為它還是在同一個模板上，只是某個插槽上換了點小東西而已。所以題目更改數據或更換敘述，對專家而言，根本沒有什麼不同，因為這個題型屬於某一個特定的模板，改數據並不影響模板的使用，但對初學而言就不同了。這或許可以解釋老師在出題時，只要一改變题目的敘述方式，學生就不知如何解的原因。

訓練得以造就天才—專家知識系統的建立

所有想要建立專家理論的學者都同意，類似專家的心智結構，需要極大的努力才能建立起來。賽門自創了一個「十年定律」，認為在任何領域中要成為專家，都需歷經十年的寒窗苦讀。即便是神童，如高斯、莫札特，也都必須付出努力，或許是比別人起步早，也可能是比別人更為用功，才得以成為領域中的天才。根據這個觀點，近年來，西洋棋天才數量激增，也許是反映出電腦導向訓練時代的降臨。因為現在的孩童可以研究的經典賽局比前人多出了許多；可以與大師級電腦對手對弈的機會，也一樣大為提高 (p.61)*。

因為對職業棋手而言，真正重要的不是經驗，而是「潛心鑽研」的工夫，這代表著持續接受超越個人能力的挑戰，而電腦正可以協助這樣不限次數、不限時間、程度不斷提升的即時訓練。

這也是為什麼熱心的愛好者可以花數萬小時下西洋棋，卻永遠無法超越業餘水準，而訓練有素的學生卻可以在短期就超越他們的。因為，花時間研究棋局，比花時間下棋（即便是比賽）更能幫助棋士成長。這樣的鑽研棋局，可以指出棋士的弱點，而立即加以改進。例如：許多初學者在學打高爾夫時進步神速，但一到可接受的程度之後，就鬆懈下來，表現開始機械化，也就無法繼續進步了。而專家在訓練的過程會不斷地檢視自己、批判歷程、並加強自己的心智與能力，朝著領域中頂尖人物的水準前進，以成為這個領域中頂尖的人物 (p.62)*。

所以動機似乎比天生的才能更為重要，父母甚或是家族的投入與協助，使得兒童們及早開始努力，其結果是各個領域的天才年紀越來越輕。而且，學校中更常發現學生學習動機是建立在成功的經驗上，學習者每一次成功的成就感都將會加強他的動機，使他更深入的鑽研。這將使人們越來越難以分辨他到底是天才，還是早熟，或是經過長時間訓練的成果。

而我國學生在中小學階段的數學常比許多外國學生來得好，但是在大學、研究所之後的表現就不再那麼傑出，或許與我們如何教數學有關。由於研究所以不再只著重於以紙筆去解一個封閉性的問題，而多數的台灣學生對數學的概念卻無法超越解決制式的問題，以致於不能將數學應用於生活之中。這也應該同時是動機上的問題，由於學習數學的主因是為了應付考試，而非解決問題的專家，所以當考試中不再有數學這科後，人們就將學習重心轉移到其他需要考試的科目，甚至很高興可以永遠不再碰數學。

同時也必需考慮一個將要進入職場的學生持續學習數學的意義何在？在他日後的職場或生活中，有什麼地方需要用到什麼程度的數學，要求他持續地學習高深數學的意義何在？是否他已具備了足夠用的基本知識了，就不再需要學習數學了。許多人聽過羅家倫先生入學時，數學零分，國文滿分的事蹟，但這並不影響他日後的成就。雖然羅先生的數學不好可能與他之前未接受過正式的數學教育有關，而不代表他的邏輯能力與抽象能力有問題，很有可能只是他不了解數學的型式。但這表示了我們在從事數學教育時必須更注意數學能力有什麼用？我們如何才能

檢視出學生適當的能力？我們到底想培養學生具有什麼樣的能力？這是從事數學教育時不可不常提醒自己的。

專家的記憶重要嗎？要如何記才好？專家的能力有那些呢？要如何才能成爲一位專家呢？在討論文中，曾志朗先生指出現代發現記憶其實分很多種，像是歷程 (process) 記憶，專門負責如何計畫和執行，另一種是結構 (structure) 記憶，指有結構、有含義的記憶，前者好比是經理，後者則有如是執行者。若要訓練專家，先要知道程序上的記憶，然後使程序上的東西自動化，之後就心有餘力、不花資源，而把資源放在高層次的思考，去尋找意義。也就是訓練一個專家，要讓他不時的看到各種型態 (pattern)，讓他們知道型態背後的意義、來龍去脈與可能的結果。所以訓練專家，就是先有歷程記憶，使它變成自動化，接下來是加強專業領域中的內容與涵義，讓他也擁有結構型記憶 (p.66-67)*。

我們想訓練數學專家，可能要試著瞭解能表現出什麼樣心智活動的人才才是專家，意即這些專家爲什麼能有不同於一般人的心智活動，同時思考如何才能培育學生有更趨近於專家的的心智活動。

若我們希望學生能儘快成爲數學專家，要能記的更快，那要鼓勵學生做好課前預習、上課專心、下課立即複習：課前預習可以讓大腦預設知識的架構，以便吸收知識；上課專心聽講可以迅速提升自己的知識與專家接近；下課立即複習可以避免遺忘之後才事倍功半的學習。在數學中要記的更好，需要瞭解整個原理的來龍去脈，許多同學學數學常只記得一堆公式，卻不知道如何運用或在不對的時機使用。要正確地學習數學的結構性知識與程序性知識，必須要改正同學的閱讀習慣，唸數理類的書籍要先閱讀目錄、序文及前言，才能對相關主題的結構有適當的概念；要能正確地操作相對的概念及公式，應該在解題前後都將自己從題目中抽離出來，由直昇機的高度來看問題，看清每一區塊在做什麼，想一下解題大綱爲何、是否每個步驟都是正確而有效的，人們用什麼技巧來解決這樣的問題，不要只拘泥於題目的數據、計算，只想把題目解出來。想記的更有效，在解決問題時才能提取正確的知識，需要以分析題型爲基礎去解題，但若想更有效而非單純的解很多題目，在解每一個問題時都要分辨題目的型式，要仔細審視已知與所求之間的關係，我們用什麼概念及公式串連兩者的關係，想想一旦已知改變，是否還能求的出來？

若能記得快、記得好、記得有效，相信就能更快的讓自己擁有專家知識系統。

成爲專家的能力

在沈君山先生與曾志朗先生的討論文中，沈君山先生認爲棋類需要的能力有三：一是計算、二是型態識別 (pattern recognition)、三是記憶，在這三種能力中最基本的是計算，最重要的是型態識別，而型態識別能力是專家與生手最主要的差別。所以生手看到一盤棋，會拼命地計算各種棋步，但就是不知道怎麼下才好。但專家根本不必算，就知道該下那一步。因爲專家看到一

盤棋局, 可以把 99% 可能的下法都丟掉, 但生手只能丟掉 90%, 相差 9%, 就讓新手得不斷去計算各種可能, 反而不知道該如何下才是最好 (p.67)*。

這三種成爲棋類專家的能力對成爲數學專家而言也是極爲重要的, 筆者分別以個人的見解加以闡述如下:

一、計算能力:

它是解題時最基本的能力, 或許它不是能否算出答案的關鍵, 但計算能力不好卻常導致解題錯誤。許多學生在計算錯誤時, 都會歸咎於太過粗心, 事實上, 就是計算能力不佳。這或許不影響他對數學內容的瞭解, 卻常影響他是否能正確的解答。尤其是在解非選擇題這類必須自己算出答案的題型時, 任何一處的計算錯誤就導致答案錯誤而無法得分, 至於選擇題或許還有機會發現計算錯誤, 而計算題則可以拿到列式正確的部分分數。至於計算能力應不應該算是一種重要的數學能力或許還有待討論, 但常計算錯誤必然讓他在數學考試中分數不高, 而無法發揮出原來應有的實力。而且計算速度過慢的考生常發生寫不完考題的情形, 更不用說還有多餘的時間得以推敲原本解不出來的題目。在數學考試中, 計算速度太慢或容易算錯必然很難考得好。

至於進一步的計算能力, 應該是指能轉換概念用較簡單的概念來解題。這樣的計算能力已經不是單純的四則運算, 而是一種經過分析的統整能力。事實上, 許多的計算速度的問題來自於數學概念是否清楚, 是否可以發現出題老師所安排的技巧, 發現並選用另一種更好的方法來解這個問題, 也就是是否具備了下面所談的型態識別能力。

二、型態識別能力:

數學的型態識別能力不同於棋類的型態識別能力, 主要的差別在於數學的型態遠遠多於國際象棋的六種棋子。這麼多的類型, 光是要記得就是一件大工程, 不要說還得依這些類型去分辨出無限種變化題型, 當然是有極高的難度。再加上數學習慣用抽象化後的符號來替代相關的數學概念, 不但要能認識符號, 還要瞭解符號的含義, 更要記得它適用的時機與使用的方法, 一般人認爲數學是很難的學科, 其主因也在此吧! 對這些人而言, 數學好像就是一群奇怪的符號、又有眾多記不完的公式及一堆看不懂的說明, 再加上看了會傻眼的題目, 對一般人而言, 要學好數學真是一大挑戰。

若想克服數學而成爲數學專家, 就要想辦法加強自己的數學型態識別能力, 這樣的型態識別能力應該就是數學的直覺力, 也就是數學的敏感度, 能否運用意元集組及模板的概念分辨出題型, 一眼就看出題目有不同的微細變化, 然後用最好的方法去解決問題。但問題在於如何才能培養自己的數學直覺力, 要經過什麼樣的訓練來培養自己的數學直覺力與敏感度。除了大量記憶與不斷解題外, 還可以做些什麼? 基本的記憶或許不能少, 但若搭配理解, 則可以減少記憶的需求與範圍。若不斷解題是事倍功半, 那什麼樣的訓練才是事半功倍? 這是數學教育應該加以探討的。通常數學老師們在不同的單元中都有自己的想法與看法, 但多半是個人的經驗與觀

察學生的結果，若能經科學性的觀察與證實，相信能更具有說服力。不過，課本及課本習題是大家多半都願意接受這是學數學的重要基礎。

三、記憶能力：

數學中的記憶也遠較西洋棋的記憶困難許多。不只是有許多的定理、公式要記憶，更麻煩的是，它運用了許多抽象化的符號去代表一個原本複雜的概念，而概念既然經過簡化，一個符號的內涵卻代表豐富內容的運用，使一般人在解決問題時更難以洞悉它原始概念的形式。所以在記憶時，必須伴隨一定程度的理解，如果只是硬背起來，那一定很難記又很快就忘記了，更不用說要加以運用。在學習中文時，專家認為漢字有形音義三種不同的面向，必須一起記起來，才能加以運用，數學公式也有形（符號）、音（讀法）、義（公式的意義），也像語詞及成語的運用一般，還要記住境（使用的條件）及法（使用的方法）。若不習慣數學的記憶方法，未經過鑽研的練習，自然難以純熟地運用。

所以成為數學專家的記憶訓練，不同於一般坊間的記憶訓練。在認知心理學中的記憶訓練著重於如何記，才能記得快、記的正確、記的久，還要能理解所記的意涵。將之運用於數學的記憶上，則還必須去探討要記那些？（否則有太多要記的。）有沒有專屬的記憶法？（很多人就是記不起來。）如何記才能運用？（背了公式卻不會用。）如何記才可以加強型態識別能力？（怎樣才能記的更好，可以迅速解題。）若是一時忘記，可不可以用邏輯推理的方式回憶起來？（太多會忘，背得精要，仍可推導出所需。）不同的類型的學生是否適用於不同的記法？（如男生長於空間及圖像，而女生偏好語言及文字。）每個人都有不同的學習方法與記憶技巧，只有經過自己的鑽研，才得以發展出最適合自己的方法。或許 NLP（神經語言學）有一個學習的方法可以參考，就是當遇到問題時，試著把自己想像成這個領域中最頂尖的大師，他會用什麼樣的心態及方法去考慮這個問題，我們就試著用一樣的心態與方法來思考。這可以讓自己跳離遇到問題時的慌亂，而像直昇機一樣由專家的高度往下看問題的情境，分析各種可能，進而找到最好的解決方法。

對專家的爭議

我們經常會聽到「專家」這個詞，但如何定義專家？他們和一般人有何不同？在不同領域的專家是否都有相同的意義？曾志朗先生在討論文中，談到專家應該是：在專業的領域中，若有人對於這個領域內的問題，解決得特別快；對問題的掌握，能夠針對當時的情境，很快的連結上問題的解答。即這些人對於領域中的知識非常豐富，能夠掌握理論與事實的來龍去脈，快速解決問題。這樣的人，在該領域中就稱為專家（p.64）。而一個圍棋高手是否就是橋牌高手？一個好的羽球國手是否就能成為好的網球選手？目前我們還不夠瞭解他們間的關聯。專家究竟能否訓練出來，或只是具有特殊能力而剛好在專業領域中發揮出來，我們對天賦與專業能力間的關係也不夠清楚。但每個領域與專業都有不同的知識，可稱之為特定領域的知識結構，而一個領域

的專業，很難轉移到另一個領域。有時可以轉移，那通常是指在執行的層次上，領域的專業知識和智慧是很難轉移的。而且常在一定的程序中，才能看出專業的特徵在那裏 (p.65-66)*。

如果能根據每個人的能力與性向，鼓勵人們在適合的領域中發展而成爲專家，這當然很好，也是達成因材施教且人人有專精。但現在的問題是，我們的教育環境還沒有主動發掘一個人的天賦的方法，只能被動地發現人們的長處。現在的基測、學測都是強調科科等值的測驗機制，這強迫學生必須學習所有的領域，只有指考，學生還有機會選擇他的專長科目。若是學生缺乏主動學習精神，很有可能稍受挫折就放棄學習，若不斷被考試壓迫著學習，就放棄學習，這是目前學校教學的一大隱憂。

學校進行數學教學時，必須考慮我們想要塑造的是考試解題的專家？或是解決數學問題的數學家？還是解決生活問題的生活專家？或者只希望學生成爲一個可以愉快過生活的公民？目標不同，手段就不一樣。在目前的學校教學中，教學受考試的影響極大，所以我們常在培養學生成爲考試解題專家，於是以不斷反覆練習的方法來引導學生成爲很會考試的專家。然而在教改中，我們一直想將訓練學生成爲有解決問題能力的生活專家，一個有創造力而非只會考試的機器。但必須先認真釐清的是何謂數學專家？我們理想中的數學專家是什麼樣子？其次是探討，是否成爲考試解題的專家，就無法成爲具有解決問題能力的專家呢？這是無法同時達成的目標嗎？如此，才能依此目標來探討我們的教學方向。

清楚我們的教學目標，再訂定適當的教學計畫，才能有效的達成目標。至於教改中簡化數學的考量，應是考慮到若有些學生無法接受高深的數學，我們是否可以把這些同學的學習目標改爲讓他成爲一個身心健全的公民，我們是否仍要強迫他學習高深的數學，或是可以讓他快快樂樂學數學即可？能應用數學解決生活中的問題也可以是數學教育的一個目標。但學生基礎能力不足，是否會剝奪他成爲數學家的機會？在這個網路遊戲、視聽娛樂充斥的時代，若無法強迫學生學習基礎知識，還會有多少學生願意耗費心力進入深奧的學術殿堂。但不論如何，我們若無法分辨清楚不同的目標，就不知道自己該做什麼。教育政策若想一次達成所有的目標，反而會讓第一線的工作者莫衷一是，與其在後方指揮前線，不如讓第一線的工作者自行判斷怎樣才是最好的處理方式。想完全掌控，卻又不是在第一線指揮，想放手，卻又不敢真正放手，這正是戰場指揮的大忌。設計出好的制度，讓第一線的工作者有所依循，制度中又有足夠的彈性去變化因應，進而成爲前線最堅實的後盾來協助他們因應，或許這才是基層工作者所需要的支援。

參考文獻

1. Philip E. Ross, 黃榮棋譯, 通往專家心智之路, 科學人, 55期, 50-63, 2006。
2. 龐中培、許碧純整理, 曾志朗、沈君山對談: 探索專家的心智, 科學人, 55期, 64-69, 2006。