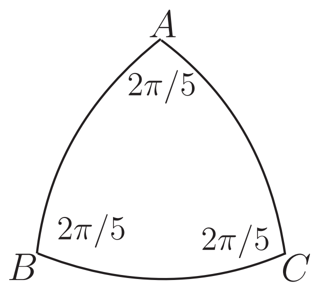
數學傳播　數學傳播　33卷3期, pp. 72-73

在球面上鋪二十個球面正三角形

張海潮

我們想從球面幾何的角度來看正二十面體的存在。在單位球面上取一個三個角都等於 $2\pi/5$ 的正三角形 ABC (註一):



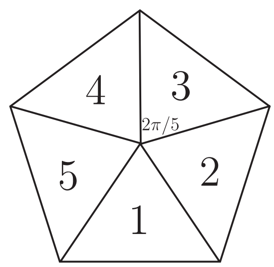
圖一

這個三角形的面積是 (註二):

$$2\pi/5+2\pi/5+2\pi/5-\pi=\pi/5.$$

單位球的面積是 4π, 因此是 $\triangle ABC$ 面積的 20 倍, 現在取 20 個和 ABC 一模一樣的正 (球面) 三角形, 我們要用這二十個「球面磚」鋪在單位球面上, 鋪法如下:

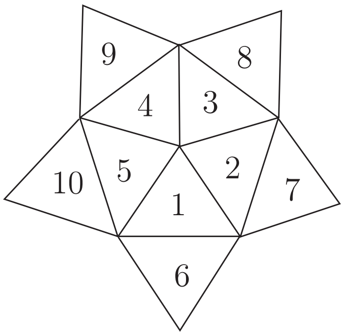
第一步, 從北極出發, 鋪上五個正三角形 (圖二)



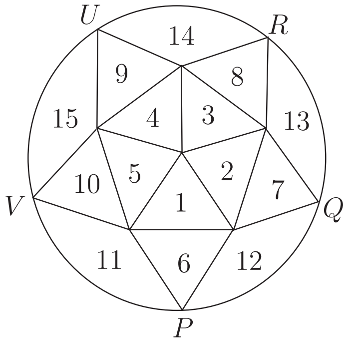
圖二

由於三角形的角度是 $2\pi/5$, 所以剛好繞北極一圈。

第二步, 延續 1∼5 這五個三角形, 再鋪五個 (圖三)



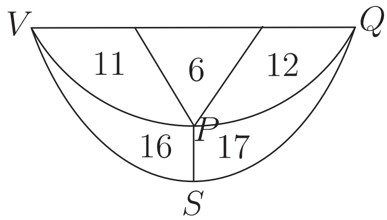
圖三



圖四

6∼10 這五個三角形互不相鄰, 之間所缺, 剛好又可以鋪進 11∼15 五個三角形 (圖四)

這 15 個三角形鋪完之後, 已經蓋住了 3π 的面積, 剩下的面積由最後 5 個三角形 (16∼20) 負責, 分別接在 11∼15 這五個三角形上, 如圖四, 11、6、12 這三個三角形聚於一點 P。



圖五

再鋪上 16, 17 兩個三角形 (圖五), 由於每一個相鄰的角度都是 $2\pi/5$, 所以剛好兜攏在 S點, 16∼20 五個三角形鋪好之後, 因爲 20 個三角形的總面積是 4π, 因此恰好鋪滿單位球面。換句話說, 16∼20 這五個三角形匯聚於點 S, 而點 S 正是南極 (註三)。同樣的方法也可用來說明正十二面體的存在。

註一、單位球面上的正三角形被角度唯一決定, 請見張海潮《數學傳播 28 卷 1 期, 球面三角形的 AAA 定理》

註二、球面三角形的面積公式請見曹亮吉《阿草的葫蘆, 遠哲科學教育基金會, 第 173 頁》

註三、另一個說法是, 如圖四, 假設南極是 S, 則由 P, Q, R, U, V 五點 (這五點在同一個緯圓上) 分別向 S 作測地線, 就會得到最後五個角度均爲 $2\pi/5$ 的正三角形。

—本文作者爲台大數學系退休教授—