數學傳播 33卷3期, pp. 28-43

數學史連結數學思考

——以費伯納西恆等式為例

陳敏晧

摘要: 本文將討論費伯納西恆等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ (Fibonacci identity) 在數學史上所扮演的角色, 這個等式長時間以來並未受到數學史的討論, 筆者才疏學淺, 希望藉此拋磚引玉, 期待此等式的研究能更豐富數學知識範疇。回溯希臘數學史, 丟番圖已有相關論述, 故此恆等式又常被稱爲丟番圖平方和恆等式 (Diophantus of Alexandria's "Sum of Squares" identity)。筆者將利用數學史相關脈絡, 連結費伯納西恆等式到許多數學思考與數學教學, 冀能爲數學史的專題研究提出一個新的視野, 因此, 本論文企圖將數學史、數學證明、數學教學、數學競試結合, 願能呈現數學史的多元面貌, 做一點彌縫補缺的工作。

關鍵詞: 費伯納西恆等式、數學史、數學思考。

壹、前言

首先歷史溯源, 德國偉大數學家萊布尼茲 (Gottfrried Wilhelm Leibniz, 1646−1716) (圖一) 在年輕時曾發現一個有趣的結果: 若 $\mathrm{Re}(z)$ 表示複數 z 的實部, $\mathrm{Im}(z)$ 表示複數 z 虛部, 若 u, v 爲複數, $|u|^2\cdot|v|^2=[\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)+\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2+[\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)-\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2$。轉換成數論想法, 即若 a, b 爲自然數, 且 $(17^2+19^2)\cdot(13^2+15^2)=a^2+b^2$, 若 $a\ge b$, 求數對 $(a,b)=?$ (解法見附錄)

圖一、萊布尼茲

透過對歷史事實的了解, 這個問題看似困難, 實際上是不折不扣的「考古題」, 在中世紀《平方數之書》(*The Book of Squares*) 一書中, 費伯納西 (Leonardo Pisano Fibonacci, 1170−1250) (圖二) 很明確提出在丟番圖 (Diophantus of Alexandria, 約西元前 246−330)

的《算術》(*Arithmetica*) 第三卷的第十九問題中[1], 寫道:

$$65 = (13)(5) = (3^2+2^2)(2^2+1^2) = 8^2+1^2 = 7^2+4^2。$$

而波羅門及多 (Brahmagupta, 598−668) 是最早發現兩個平方和的恆等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$, 而其著作翻成阿拉伯文後再翻成拉丁文。之後這個恆等式在阿拉伯世界廣泛被運用[2], 例如: 阿爾·卡西 (al-Khazin, 約 900−971) 在大約 950年明確使用這個恆等式[3], 其後費伯納西在《平方數之書》有更深入且專精的算術研究, 因此, 丟番圖平方和恆等式又常被稱爲費伯納西恆等式、兩個平方和恆等式 (Two square identity)、波羅門及多恆等式 (Brahmagupta's identity)、波羅門及多和費伯納西恆等式 (Brahmagupta- Fibonacci identity), 本文將從不同的數學教學單元, 與歷史上著名的數學家如何研究費伯納西恆等式, 例如: 數論 (Number theory) 教學中 $(101^2+102^2)(103^2+104^2)$ 的結果會是如何? 本論文將討論此恆等式在專題研究中所扮演的角色與地位, 藉由數學運算的方法論、數學史的知識面向, 透過數學的洞察力 (Mathematical insight), 來重新定位與認識費伯納西恆等式。

圖二、費伯納西

貳、如何證明

首先回顧數學史上的丟番圖, 這位號稱代數學之父的最有名故事, 當屬其墓誌銘的《算術》敍述, 因爲其歲數的呈現便是一元一次方程式。內文如下:

> 墳中安葬著丟番圖, 多麼令人驚訝, 它忠實地記錄了所經歷的道路。「上帝給予的童年占六分之一, 又過十二分之一, 兩頰長鬍, 再過七分之一, 點燃起結婚的蠟燭。五年之後, 天賜貴子, 可憐遲到的寧馨兒, 享年僅及其父之半, 便進入冰冷的墓。悲傷只有用數論的研究去彌補, 又過四年, 他也走完了人生的旅途。」

文中提及數論的研究就是丟番圖所著的六卷《算術》, 此書影響深遠, 最令人印象深刻的就是費馬 (Pierre de Fermat, 1601−1655) (圖三) 在研究丟番圖《算術》第 2卷的問題8時, 在頁邊寫下註記「不可能將一個立方數寫成兩個立方數之和; 或者將一個四次冪寫成兩個四次

[1]關於丟番圖的生平事蹟可參考 J. D. Swift. "Diophantus of Alexandria." *The American Mathematical Monthly*, Vol. 63, No. 3 (Mar., 1956): 163-170.

[2]關於丟番圖的代數理論在阿拉伯世界的發展, 有興趣的讀者可參考 S. Gandz. "The Sources of Al-Khowarizmi's Algebra." *Osiris*, Vol. 1 (1936): 263-277.

[3]Leonardo Pisano Fibonacci. *The Book of Squares*, An annotated translation into modern English by L. E. Sigler (Orlando, Florida: Academic Press, Inc., 1986), p.28.

冪之和; 或者, 總的來說, 不可能將一個高於 2次冪, 寫成兩個同樣次冪的和。」費馬寫道:「 對這個命題我有一個十分美妙的證明, 這裡空白太小, 寫不下。」1670 年, 費馬的兒子出版載有費馬註記的《丟番圖算術》。丟番圖對於代數領域的影響不僅如此, 在直線方程式中求格子點 (整數值的點) 問題也稱爲「丟番圖問題」, 此外, 本文的重心「丟番圖平方和恆等式」是代數世界中有趣且值得研究開發的知識寶藏, 而其數學本質正是挪威數學家李 (Marius Sophus Lie, 1842−1899) (圖四) 在代數上的卓越表現: 李群 (Lie group) 和李代數 (Lie algebra)[4], 其中的 $SO(2)$ 指實數矩陣 A 所構成的集合, 而 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, 且 $AA'=I$, $\det A=1$, 此 $SO(2)$ 即是「丟番圖平方和恆等式」的矩陣代數模型。

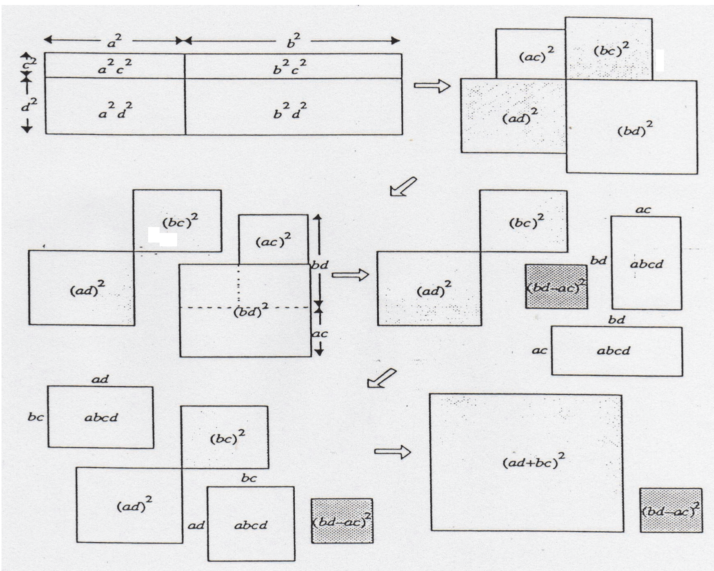
圖三、費馬

圖四、李

據筆者知悉費伯納西恆等式可以分成三類: 不言而喻的證明、三角形的幾何證明、代數證明。

一、不言而喻的證明 (Proof without words)

不言而喻的證明可以參考 Roger B. Nelsen 於 *Mathematics Magazine*, Vol. 66, No. 3 (1993), p.180. 所發表的 “Proof without Words: Diophantus of Alexandria’s “Sum of Squares” Identity.”, 如圖五所示:



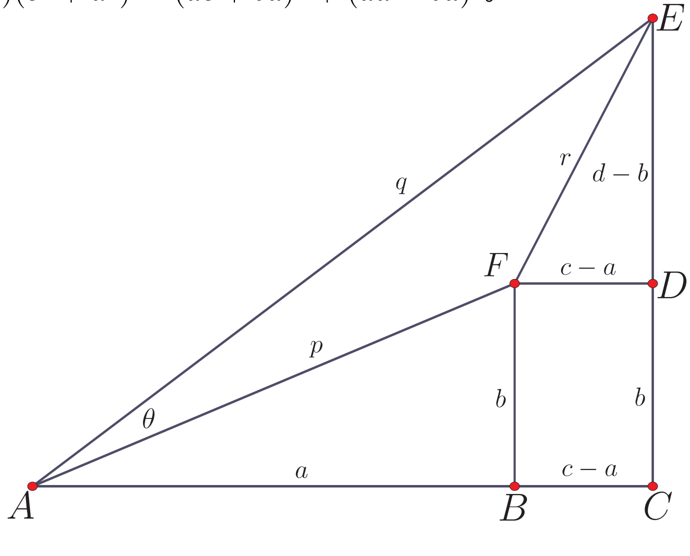
圖五

[4]數學家李在 1888年至 1893年間出版《變換群論》(3卷), 後人爲紀念他的貢獻, 將連續變換群改稱「李群」, 而後他還創立「李代數」, 其後法國數學家嘉當 (Elie Joseph Cartan, 1869−1951) 在李群理論方面有更卓越貢獻。

這個證明利用長方形面積的重整概念, 非常適合做爲數學思考的題材。

二、三角形的幾何證明:

三角形的幾何證明: 令 $\overline{AC}=c$, $\overline{CE}=d$, $\overline{AB}=a$, $\overline{BF}=b$, $\overline{AF}=p$, $\overline{AE}=q$, $\overline{EF}=r$, $\angle EAF=\theta$, $\angle ABF=\angle ACE=\angle FDE=90^\circ$, 則 $\overline{BC}=\overline{FD}=c-a$, 如圖六。由畢氏定理知 $p^2=a^2+b^2$, $q^2=c^2+d^2$, $r^2=(c-a)^2+(d-b)^2$, 在 $\triangle EAF$ 中, 運用餘弦定理得 $\cos\theta=\dfrac{p^2+q^2-r^2}{2pq}$, $2pq\cdot\cos\theta=p^2+q^2-r^2$, 化簡得 $pq\cdot\cos\theta=ac+bd$, 平方得 $p^2q^2\cdot\cos^2\theta=(ac+bd)^2$, $p^2q^2=(ac+bd)^2+(pq\sin\theta)^2$, 又 $a\triangle EAF=a\triangle ACE-a\triangle ABF-a\triangle DEF-a\square BCDF$, 代面積公式即 $\frac{1}{2}pq\sin\theta=\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}(c-a)(d-b)-b(c-a)$, 化簡得 $pq\sin\theta=ad-bc$, 代入上式, 即費伯納西恆等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bd)^2$。[5]



圖六

這個證明非常具有數學魅力, 只用具備高一數學程度, 定能通曉, 然如何思索得知, 才是研究數學的重心所在。

三、代數證明

代數證明需引進共軛複數 (Conjugate complex number), 此時的費伯納西恆等式變得十分可親了 (Accessible), 這就是萊布尼茲所利用的複數分解方式, 筆者認爲此種方式證明, 當

[5]參考梭爾著、胡守仁譯,《數學家是怎麼思考的—純粹帶來力量》(台北: 天下遠見出版社, 2006), 頁 47−48。

屬證明類型中最不可思議的:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= [(a+bi)(a-bi)][(c+di)(c-di)]\\ &= [(a+bi)(c-di)][(a-bi)(c+di)]\\ &= [(ac+bd)+(bc-ad)i][(ac+bd)-(bc-ad)i]\\ &= (ac+bd)^2+(bc-ad)^2\\ &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2\end{aligned}$$

在上複數平面時, 筆者曾經在課堂中講解此證明方式, 學生對於此證明方式皆嘖嘖稱奇, 端詳許久。

與上述類似的證明如下:

因為 $|(a+bi)(c+di)|=|a+bi||c+di|$,
根據複數運算得 $|(ac-bd)+(ad+bc)i|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$,
平方得 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$。

上兩例根據複數來證明費伯納西恆等式, 不僅簡單易懂, 而且令人讚嘆數學的精巧, 丟番圖、費伯納西兩位代數大師在有生之年, 恐怕都難以如此料想。

參、費伯納西恆等式連結數學史問題與數學思考

德國大數學家克萊茵 (Felix Klein, 1849−1925) 曾對數學史教學及數學史影響數學思考提出一段深刻的觀點:

> 歷史之教學, 不僅在名師大家之遺言軼事, 足生後學高山仰止之思, 收聞風興起之效, 更可指示基本概念之有機發展情形, 與夫心理及邏輯程序, 如何得以融合調劑, 不至相背, 反可相成, 誠為教師最宜留意體會之一事也。

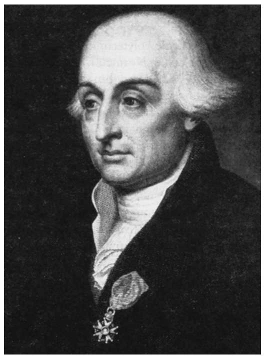
可見數學史能將數學情境中的「人、事、時、地、物」作不鑿痕跡地結合, 對於數學思路的助益宛如有「畫龍點睛」之妙。以下論述便是循著克萊茵的觀點來闡述歷史上許多數學家或數學式子的推論與費伯納西恆等式的關係。

一、應用於柯西不等式與拉格朗日恆等式

柯西 (Cauchy, Augustin - Louis, 1789−1857) (圖七) 是著作頗豐的法國數學家, 其一生的數學論文有八百多篇, 尤其在分析學上的巨大貢獻, 其中柯西不等式 (Cauchy inequality):

圖七、柯西

當 $a_1, a_2 \cdots a_n \in R$, 又 $b_1, b_2 \cdots b_n \in R - \{0\}$, 則 $({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot ({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$, 等號成立時, 爲 $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$。費伯納西恆等式可應用於柯西不等式的二維情形, 即 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 \geq (ac+bd)^2$, 當 $(ad-bc)^2 = 0$ 時, 得 $ad - bc = 0$, 若 $c \neq 0$ 且 $d \neq 0$, 即 $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ 時, 得 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$。此可延伸至柯西不等式的另一形式, 以範數 (norm) 的寫法: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$。



圖八、拉格朗日

另一法國數學家拉格朗日 (J. L. Lagrange, 1736−1813) (圖八), 號稱「三 L (Laplace、Lagrange、Legendre)」之一, 其拉格朗日恆等式 (Lagrange equality):

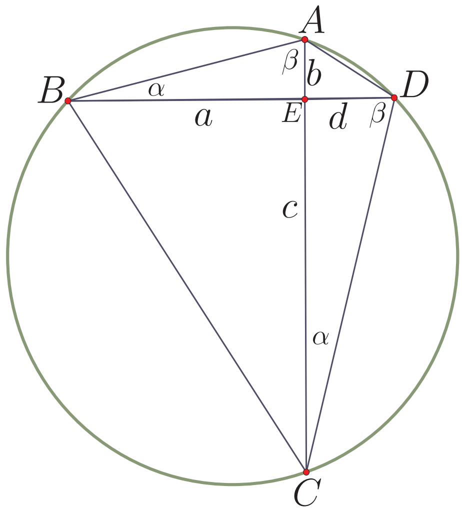
$$
\begin{aligned}
&({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot ({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) \\
&= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2
\end{aligned}
$$

可以明顯看出, 因爲 $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$, 所以, 得下式 $({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2) \cdot ({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$, 當等號成立時, 即柯西不等式成立。而拉格朗日恆等式當 $n = 2$ 時, 即是費伯納西恆等式。

二、托勒密定理的特例

托勒密定理 (Ptolemy's theorem): 當 $ABCD$ 爲圓內接四邊形時, 則 $\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BD}$。當圓內接四邊形 $ABCD$ 中 (圖九), 令 $\overline{AE} = b$, $\overline{BE} = a$, $\overline{CE} = c$, $\overline{DE} = d$, 因爲 $\angle ABE = \angle DCE = \alpha$, $\angle BAE = \angle CDE = \beta$ (對同弧), 所以, $\triangle AEB \sim \triangle DEC$, 得 $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$, 即 $ad - bc = 0$, 費伯納西恆等式將轉換成下式: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac + bd)^2 + 0^2 = (ac + bd)^2$。

若 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, 得 $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\overline{CD} = \sqrt{c^2 + d^2}$, 恆等式再轉換成 $\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2} = ac + bd$, 即 $\overline{AB} \times \overline{CD} = ac + bd$, 同理: $\overline{AD} \times \overline{BC} = ab + cd$, 兩式相加得 $\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC} = ac + bd + ab + cd = (a + d) \cdot (b + c) = \overline{AC} \times \overline{BD}$, 成爲托勒密定理的特例。因此, 適當運用兩次費伯納西恆等式的結果可得托勒密定理。



圖九

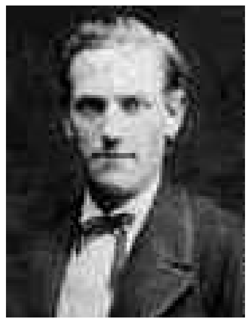
三、比較阿達馬不等式與格蘭行列式

根據費伯納西恆等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$, 使用變換變數得 $(a_{11}^2+a_{12}^2)(a_{21}^2+a_{22}^2)=(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2$, 顯而易見 $(a_{11}^2+a_{12}^2)(a_{21}^2+a_{22}^2)\geq(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2$, 引入行列式 (Determinant) 得 $(a_{11}^2+a_{12}^2)(a_{21}^2+a_{22}^2)\geq\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}^2$, 這個式子與法國偉大分析學家阿達馬 (Jacques Salomon Hadamard, 1865−1963) (圖十) 發現性質一致, 此即阿達馬不等式 (Hadamard's inequality), $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nm}\end{vmatrix}^2\leq\sum\limits_{i=1}^n a_{1i}^2\cdot\sum\limits_{i=1}^n a_{2i}^2\cdots\sum\limits_{i=1}^n a_{ni}^2$, $n=2$ 時的特例。

圖十、阿達馬

爲了討論費伯納西恆等式與行列式的關係, 就必須引進丹麥數學家格蘭 (Jorgen Pedersen Gram, 1850−1916) (圖十一) 的著名格蘭行列式, 若 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in R^n$, 定義如下:
$Gram(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\det G=\det(x_i\cdot x_j)$

其中 $G=(x_i,x_j)=\begin{pmatrix}x_1\cdot x_1&\cdots&x_1\cdot x_n\\\cdots&\cdots&\cdots\\x_n\cdot x_1&\cdots&x_n\cdot x_n\end{pmatrix}$, 當 $n=1$ 時,



圖十一、格蘭

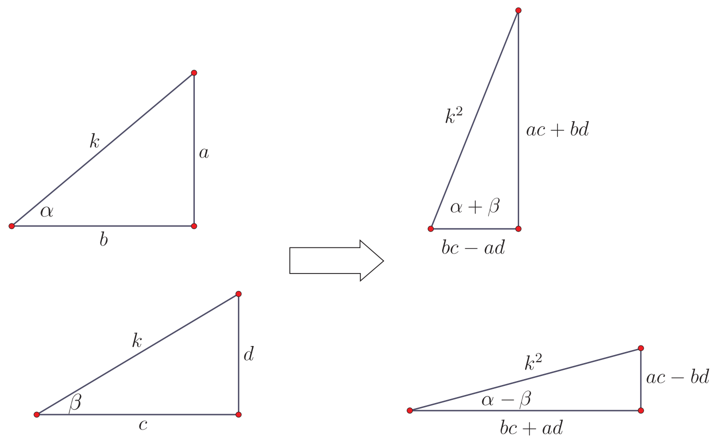
$Gram(x_1) = x_1 \cdot x_1 = \|x_1\|^2$, 當 $n = 2$ 時, $Gram(x_1, x_2) = det \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_1 & x_1 \cdot x_2 \\ x_2 \cdot x_1 & x_2 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - (x_1 \cdot x_2)^2$, 若此時的 $x_1, x_2 \in R^2$, 且 $x_1 \neq (0,0)$, 令點 x_2 到直線 $\overleftrightarrow{ox_1}$ 的直線距離爲 d, 根據平行四邊形面積得 $d^2 = \dfrac{Gram(x_1, x_2)}{Gram(x_1)}$, 因爲 $Gram(x_1) > 0$, 得 $Gram(x_1, x_2) \geq 0$, 即 $\|x_1\|^2\|x_2\|^2 \geq (x_1 \cdot x_2)^2$, 即費伯納西恆等式的不等式情況。

四、與向量和體的關係

令向量 (Vector) $\overrightarrow{u} = (a, b)$, $\overrightarrow{v} = (c, d)$, 內積定義: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$, 外積定義: $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\| = |ad - bc|$, 根據費伯納西恆等式 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$, 所以, $|\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|^2$, 若 $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ 的夾角爲 θ, 因爲 $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\theta$, 這個等式對於數學老師介紹爲什麼定義 $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\theta$ 是有直接的幫助。

值得注意的是因爲 $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{u}$, $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v}$, 所以, 當 $\overrightarrow{u} = (a, b)$, $\overrightarrow{v} = (c, d)$ 時, 計算 $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ 時[6], 需要將 $\overrightarrow{u} = (a, b)$ 改成 $\overrightarrow{u} = (a, b, 0)$, $\overrightarrow{v} = (c, d)$ 改成 $\overrightarrow{v} = (c, d, 0)$, 然後計算 $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right) = (0, 0, ad - bc)$, 若定義 (a, b) 的運算如下: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ 及 $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$, 則 (a, b) 形成一個體 (Field) [7]。

五、證明三角函數和差角公式



[6] 在講述當 $\overrightarrow{u} = (a, b)$, $\overrightarrow{v} = (c, d)$ 時, 計算 $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} =$? 可以讓學生思考一下, 會有意想不到的各種結果。

[7] 礙於篇幅請讀者自行參閱高等代數關於體的定義與運算要求。

令恆等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$ 中的 $a^2+b^2=c^2+d^2=k^2$。
和角公式:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{ac+bd}{k^2}=\frac{a}{k}\times\frac{c}{k}+\frac{b}{k}\times\frac{d}{k}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{bc-ad}{k^2}=\frac{b}{k}\times\frac{c}{k}-\frac{a}{k}\times\frac{d}{k}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{ac+bd}{bc-ad}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{d}{c}}{1-\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

差角公式:

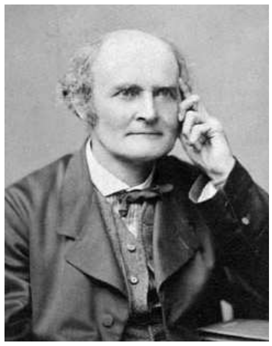
$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{ac-bd}{k^2}=\frac{a}{k}\times\frac{c}{k}-\frac{b}{k}\times\frac{d}{k}=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{bc+ad}{k^2}=\frac{b}{k}\times\frac{c}{k}+\frac{a}{k}\times\frac{d}{k}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{ac-bd}{bc+ad}=\frac{\frac{a}{b}-\frac{d}{c}}{1+\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}。$$

圖十二、維塔

上述的三角函數分解巧思來自於中世紀法國代數學家維塔 (François Viète,1540−1603) (圖十二), 如此分解想法, 可提供三角函數專題研究的好素材。中學的三角函數有一試題: 若 $m,n\in R$, 且 $m\cos\theta+n\sin\theta=3$, $m\sin\theta-n\cos\theta=1$, 求 $m^2+n^2=$ _____。除了利用兩式的平方和外, 也可以使用費伯納西恆等式, 即

$$\begin{aligned}m^2+n^2&=(m^2+n^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(m\cos\theta+n\sin\theta)^2+(m\sin\theta-n\cos\theta)^2\\&=3^2+1^2=10。\end{aligned}$$

六、與矩陣相關的模式


圖十三、凱里

矩陣 (Matrix) 這個名詞源自英國數學家凱里 (Arthur Cayley, 1821−1895) (圖十三) 1858年的論文, 形式如下:

$$\begin{vmatrix}P & Q\\ R & S\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}p & q\\ r & s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Pp+Qr & Pq+Qs\\ Rp+Sr & Rq+Ss\end{vmatrix}。$$

若定義矩陣 $M(a,b)=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$, 利用矩陣的乘法運算, 即得下式

$$M(a,b)\cdot M(c,d)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}=M(ac-bd, ad+bc)$$

此結果類似費伯納西恆等式的表徵模式 (Representation pattern)。

七、證明費馬—歐拉質數定理

費馬在 1660年曾在筆記本上寫著:「每個可表示爲 $4n+1$ 形式的質數, 只能用兩個平方和的形式表達。」由於費馬未留下證明過程, 所以, 在數學史上仍不能確認費馬是否已經證明上述定理, 直到一百多年後, 才由歐拉解決。礙於篇幅所限, 筆者僅談論歐拉在證明費馬的質數定理中用到費伯納西恆等式部份, 首先引入範數定理:「如果一個質數能整除一個範數但不能整除範數的底數, 則此質數本身就是一個範數。」所以, 範數可以理解爲兩個整數的平方和, 而此兩個整數稱爲該範數的底數, 歐拉證明:「形如 $4n+1$ 的質數 p, 只能按一種方法表達爲一個範數。」證明如下:

根據範數定理, 則質數 p 本身也是一個範數, 令 $p=a^2+b^2$ 此爲唯一的範數表達式, 假設 $p=A^2+B^2$ 爲第二種範數表達式, 其中 a, b, A, B 均相異。

相乘上兩種形式得 $p^2=(a^2+b^2)(A^2+B^2)$, 利用費伯納西恆等式得 $p^2=(a^2+b^2)(A^2+B^2)=(Aa+Bb)^2+(Ab-Ba)^2=(Aa-Bb)^2+(Ab+Ba)^2$。將兩個範數底數相乘如下:

$$(Aa+Bb)\cdot(Aa-Bb)=A^2a^2-B^2b^2=A^2(a^2+b^2)-b^2(A^2+B^2)=(A^2-b^2)p$$

所以, $Aa+Bb$ 與 $Aa-Bb$ 兩個因式必有一個可被 p 整除, 分兩種情形討論,

(1) 若 $Aa+Bb=p$, 則 $Ab-Ba=0$, 因此, $A^2b^2=B^2a^2$, 利用移項及和比定律得 $\dfrac{A^2}{a^2}=\dfrac{B^2}{b^2}=\dfrac{A^2+B^2}{a^2+b^2}=\dfrac{p}{p}=1$, 得 $A=a$ 及 $B=b$, 矛盾。

(2) 同理可得, 若 $Ab+Ba=p$, 則 $Aa-Bb=0$, 因此, $A^2a^2=B^2b^2$, 利用移項及和比定律得 $\dfrac{A^2}{b^2}=\dfrac{B^2}{a^2}=\dfrac{A^2+B^2}{b^2+a^2}=\dfrac{p}{p}=1$, 得 $A=b$ 及 $B=a$, 矛盾。

上述兩種情形均與 a, b, A, B 均相異產生謬誤, 所以, 形如 $4n+1$ 的質數 p, 只能按一種方法表達爲一個範數, 得證。

八、解決相關數學競試考題:

利用費伯納西恆等式常使困難的計算或證明得到有效且立即的功效, 例如, 曾有競試題目如下:

1. **三角函數類型**:

已知: $a>0$ 且 $b>0$, 且 $\dfrac{\sin^4 x}{a}+\dfrac{\cos^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$。

求證: $\forall\ n\in N,\ \dfrac{\sin^{2n}x}{a^{n-1}}+\dfrac{\cos^{2n}x}{b^{n-1}}=\dfrac{1}{(a+b)^{n-1}}$ 恆成立。

證明: 因爲

$$\begin{aligned}
1&=\left(\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\right)\cdot(a+b)\\
&=\left[\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 x}{\sqrt{b}}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\right]\quad\text{(利用費伯納西恆等式)}\\
&=\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{\cos^2 x}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}\right]^2+\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b}-\frac{\cos^2 x}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a}\right]^2\\
&=1+\left[\frac{\sin^2 x}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b}-\frac{\cos^2 x}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a}\right]^2
\end{aligned}$$

即得 $\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\sin^2 x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\cos^2 x$, 令 $\dfrac{\sin^2 x}{a}=\dfrac{\cos^2 x}{b}=t>0$, 代入已知式, 得

$$\frac{1}{a+b}=\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\sin^2 x\cdot\frac{\sin^2 x}{a}+\cos^2 x\cdot\frac{\cos^2 x}{b}=\sin^2 x\cdot t+\cos^2 x\cdot t=t$$

則 $\forall n\in N,$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^{2n}x}{a^{n-1}}+\frac{\cos^{2n}x}{b^{n-1}}&=\sin^2 x\cdot\left(\frac{\sin^2 x}{a}\right)^{n-1}+\cos^2 x\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{b}\right)^{n-1}\\
&=\sin^2 x\cdot t^{n-1}+\cos^2 x\cdot t^{n-1}\\
&=t^{n-1}\\
&=\frac{1}{(a+b)^{n-1}},\quad\text{得證。}
\end{aligned}$$

2. **不等式類型**:

已知: 若 $a,b,c,d\in R$。

求證: $2\sqrt{|ad-bc|}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$, 等號成立時 $\dfrac{a}{b}=-\dfrac{d}{c}$, $(b\ne 0,c\ne 0)$ 及 $|a|=|b|$ 且 $|c|=|d|$。

證明: 首先利用費伯納西恆等式, 得下式

$$(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2\ge(ad-bc)^2$$

所以, $|ad-bc|\le\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$, 開根號得

$$\sqrt{|ad-bc|}\le\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\tag{1}$$

再利用算-幾不等式, 得

$$\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} \le \frac{1}{2}\Big(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\Big) \tag{2}$$

綜合 (1) (2) 不等式, 得 $2\sqrt{|ad-bc|} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$, 得證。

當 (1) 不等式等號成立, 則 $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2$, 即 $\dfrac{a}{b}=-\dfrac{d}{c}$, $(b\neq 0, c\neq 0)$; 當 (2) 不等式等號成立, 即 $|a|=|b|$ 且 $|c|=|d|$。

3. **複數類型**:

已知: 若 $r, s\in C$, 且 $r\cdot s=0$。

求證: $r=0$ 或 $s=0$。

證明: 令 $r=a+bi$, $s=c+di$, 其中 $a,b,c,d\in R$

則 $0=r\cdot s=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

此同義於 $0=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$, 利用費伯納西恆等式得:
$0=(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)$, 因爲 $a,b,c,d\in R$, 則 $a^2+b^2=0$ 或 $c^2+d^2=0$,
即 $a=b=0$ 或 $c=d=0$, 得 $r=a+bi=0$ 或 $s=c+di=0$, 得證。

此外, 利用四個平方和的競試問題, 由於解答較爲煩瑣, 僅列題目如下:

已知: 若 $A, B\in R$。

求證: (1) 若兩整數 A 與 B 可表爲四個平方數之和, 其積 AB 亦可表爲四個平方數之和。

(2) 任意自然數皆可表爲不多於四個平方數之和。

上述的證明與數學競試問題, 均需引入費伯納西恆等式才方便解決問題。

肆、推廣與研究

費伯納西恆等式是否爲可推廣的恆等式呢? 這是一個值得深思及討論的數學問題, 根據《數學家是怎麼思考的—純粹帶來力量》第 67頁所陳述的:「目前我們有 1、2、4、8 個平方和的等式。下一個是什麼? 顯然, 我們想到 16。可惜不對。這個序列斷了。事實上, 數學家已經證明了只有在 1、2、4 及 8 時, 這個等式才會存在。這就是個不能推廣的例子。」

當「一個」平方和即 $(a^2)(x^2)=(ax)^2$;
「兩個」平方和即費伯納西恆等式 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$;

「四個」平方和即 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)=(ax+by+cz+dt)^2+(bx-ay+dz-ct)^2+(cx-dy-az+bt)^2+(dx+cy-bz-at)^2$。

據說這個「四個」平方和公式讓歐拉 (Euler, Léonard, 1707−1783) (圖十四) 想了十三年 (約 1730−1742) 才有所結果, 因此, 上式稱爲歐拉四數平方和恆等式 (Euler Four-Square Identity)。到了 1770年, 數學家拉格朗日依據歐拉的發現, 給出:「自然數可表示爲四個平方數之和。」(此即四平方和定理)。[8]

圖十四、歐拉

之後, 數學界發生遽變, 便是產生四元數 (Quaternion) 的代數符號。這個四元數爲數學家漢米爾頓 (William Rowan Hamilton, 1805−1865) (圖十五) 於 1843年所創造的, 根據漢米爾頓自述:

> 1843年 10月 16日, 當我和漢米爾頓太太步行去都柏林途中的勃洛翰橋的時候, 它們就來到了人世間, 或者說出生了, 發育成熟了。這就是說, 此時此地我感到思想的電路接通了, 而從中落下的火花就是 i, j, k 之間的基本方程, 恰恰就是我後來使用它們的那個樣子, 我當場抽出筆記本 (它還保留著), 將這些思想紀錄下來, 與此同時, 我感到也許值得花上未來的至少 10年或許 15年的勞動, 但當時已完全可以說, 我感到一個問題就在那一刻已經解決了, 智力該緩口氣了, 它已經糾纏著我至少 15年了。

這種新的代數運算模式, 例如: 乘法運算不滿足交換律 (Communicative law) 的方式, 改變了許多數學家的思考, 因此, 可利用四元數的方法證明上述複雜的式子, 根據首先四元數運算定義: $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$, $ji=-k$, $kj=-i$, $ik=-j$,
四元數的乘法運算表如下:

相乘積	a	bi	cj	dk
x	ax	bxi	cxj	dxk
$-yi$	$-ayi$	$-byi^2$	$-cyji$	$-dyki$
$-zj$	$-azj$	$-bzij$	$-czj^2$	$-dzkj$
$-tk$	$-atk$	$-btik$	$-ctjk$	$-dtk^2$

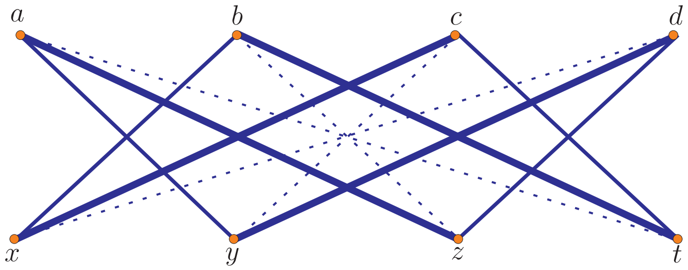
整理得下表:

相乘積	a	bi	cj	dk
x	ax	bxi	cxj	dxk
$-yi$	$-ayi$	by	cyk	$-dyj$
$-zj$	$-azj$	$-bzk$	cz	dzi
$-tk$	$-atk$	btj	$-cti$	dt

圖十五、漢米爾頓

[8] 吳振奎, 幾個與 "形數" 有關的問題, 數學傳播, 第 29卷第 1期, 台北, 2005, 66頁。

此即 $(a+bi+cj+dk)(x-yi-zj-tk)=(ax+by+cz+dk)+(bx-ay+dz-ct)i+(cx-dy-az+bt)j+(dx+cy-bz-at)k$ 或利用行列式的方式如下所示, 這是筆者經過長時間思索得來的, 是不是有點像帕普斯定理 (Pappus' theorem) 的圖形呢?



此即代表 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)=(ax+by+cz+dt)^2$

$$+\left(\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & d \\ z & t \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b & d \\ y & t \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} a & d \\ x & t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}\right)^2。$$

而典型的凱里數 (Cayley number) 的形式爲 $a+be1+ce2+de3+ee4+fe5+ge6+he7$, 這就是熟知的八元數 (Octonion), 其中的凱里三重數 (Cayley triples) 爲 $(e1,e3,e2)$、$(e1,e5,e4)$、$(e1,e6,e7)$、$(e2,e6,e4)$、$(e2,e7,e5)$、$(e3,e7,e4)$、$(e3,e5,e6)$, 這些三重數的運算滿足四元數的定義 $(i\ j\ k)$。值得注意的是這些四元數、八元數的分類方式均來自前述的李群和李代數中的交換群 (Commutative group) 概念。

八元數的乘法運算表如下:

$a*b$	$a\cdot 1$	$a\cdot e1$	$a\cdot e2$	$a\cdot e3$	$a\cdot e4$	$a\cdot e5$	$a\cdot e6$	$a\cdot e7$
$b\cdot 1$	1	$e1$	$e2$	$e3$	$e4$	$e5$	$e6$	$e7$
$b\cdot e1$	$e1$	-1	$e3$	$-e2$	$e5$	$-e4$	$-e7$	$e6$
$b\cdot e2$	$e2$	$-e3$	-1	$e1$	$e6$	$e7$	$-e4$	$-e5$
$b\cdot e3$	$e3$	$e2$	$-e1$	-1	$e7$	$-e6$	$e5$	$-e4$
$b\cdot e4$	$e4$	$-e5$	$-e6$	$-e7$	-1	$e1$	$e2$	$e3$
$b\cdot e5$	$e5$	$e4$	$-e7$	$e6$	$-e1$	-1	$-e3$	$e2$
$b\cdot e6$	$e6$	$e7$	$e4$	$-e5$	$-e2$	$e3$	-1	$-e1$
$b\cdot e7$	$e7$	$-e6$	$e5$	$e4$	$-e3$	$-e2$	$e1$	-1

直到 1818年,「八個」平方和才由丹麥數學家狄根 (Ferdinand Degen, 1766−1825) 發現的, 如下所示:

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)(m^2+n^2+o^2+p^2+q^2+r^2+s^2+t^2)\\
&\quad=(am-bn-co-dp-eq-fr-gs-ht)^2+(bm+an+do-cp+fq-er-hs+gt)^2\\
&\qquad+(cm-dn+ao+bp+gq+hr-es-ft)^2+(dm+cn-bo+ap+hq-gr+fs-et)^2\\
&\qquad+(em-fn-go-hp+aq+br+cs+dt)^2+(fm+en-ho+gp-bq+ar-ds+ct)^2\\
&\qquad+(gm+hn+eo-fp-cq+dr+as-bt)^2+(hm-gn+fo+ep-dq-cr+bs+at)^2。
\end{aligned}$$

所以, 上式稱為「狄根八數平方和恆等式」(Degen's Eight-Square identity), 由於上式也曾被數學家格拉夫茲 (John Thomas Graves, 1806−1870) 及凱里發現, 因此, 又稱為「狄根−格拉夫茲−凱里的八數平方和恆等式」(The Degen-Graves-Cayley Eight-Square identity)。

伍、結論:

費伯納西恆等式是個極有趣且簡易的數學等式, 筆者從證明、柯西不等式與拉格朗日恆等式、托勒密定理的特例、比較阿達馬不等式與格蘭行列式、利用共軛複數證明、與向量的關係、三角函數和差角公式、與矩陣的相關的模式、證明費馬−歐拉質數定理、競試問題討論恆等式的意義, 最後淺論其推廣與研究, 希望此實例的分享可以讓讀者聯結 (Link) 到許多數學思考, 這種聯結與統合的能力是成為數學家的重要指標, 礙於筆者學識有限, 僅能侷限於數學知識範疇中, 但是, 筆者有靈感覺得此恆等式應該在自然科學: 如電學、力學、化學、動力學、生物等領域, 還有許多討論的空間, 就如同費氏數列 (Fibonacci sequence) 一樣, 原本僅是一個單純數學關係式, 但是, 其運用既廣且深。筆者才疏學淺, 希望集結成此小文章, 提供對數學感興趣的讀者一個數學實例推演。最後引《數學家是怎麼思考的—純粹帶來力量》第 72頁的一段話:「數學史最令人感到心滿意足的時刻, 就是發現兩個一直以來認為是疏遠而不相關的領域, 基本上卻是同一樣東西的不同偽裝。」筆者利用有趣的數學史與認識數學家的「軟招式」, 希望能軟化嚴肅的數學專題研究的「硬功夫」, 冀望學生能讓一睹數學家的心靈世界, 享受數學的知識饗宴, 接受數學的知識洗禮, 接近數學的知識殿堂!

陸、附錄:

1. 計算如下: 令 $u=a+bi$, $v=c+di$, 其中 $a,b,c,d\in R$, 因為
$|u|^2+|v|^2=[\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)+\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2+[\mathrm{Im}(u)\cdot\mathrm{Re}(v)-\mathrm{Re}(u)\cdot\mathrm{Im}(v)]^2$, 所以,
得下式: $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$, 則
$(17^2+19^2)\cdot(13^2+15^2)=a^2+b^2$,
得 $(a,b)=(17\times 15+19\times 13, 19\times 15-17\times 13)=(502,64)$ 或
$(a,b)=(17\times 13+19\times 15, 17\times 15-19\times 13)=(506,8)$。

附記: 筆者曾以此主題在「2008濟城數學營」(由台北市成功高中數學科主辦) 作專題報告, 學員均是高中生, 會議中場休息時間, 我仿照費伯納西恆等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ 出了三數平方和乘積是否等於三個數平方和? 式子如下: $(a^2+b^2+c^2)(x^2+$

$y^2+z^2) = f^2(a,b,c,x,y,z)+g^2(a,b,c,x,y,z)+h^2(a,b,c,x,y,z)$, 待我問題陳述後, 席間一位杜姓學生 (建中數理班) 猛搖頭, 我向前詢問式子成立與否? 這位學員只說:「性質符號個數不符, 故不成立。」斯哉青年才俊, 繼續努力, 當是數學界明日之星。

參考文獻

1. 李鐵烽, 丟番圖恆等式在解題中的應用, 中學數學月刊, 蘇州大學, 蘇州; 江蘇省數學學會, 2002年7月, 46−48頁。
2. 林琦焜, Cauchy-Schwarz 不等式之本質與意義, 數學傳播, 24卷 1期, 台北, 2000, 26−42頁。
3. 張福春、李姿霖, 不等式之基本解題方法, 數學傳播, 31卷 2期, 台北, 2007, 38−61頁。
4. 洪萬生、蘇俊鴻, 利用 HPM 來概念化數學教師教育: 以畢氏定理和餘弦定律之統整為例, 發表於香港教育學院, 數學教育研討會2008: 數學思考與解題, 2008年 4月 29-30日。
5. 梭爾著、胡守仁譯, 數學家是怎麼思考的—純粹帶來力量, 天下遠見出版社, 台北, 2006。
6. 蕭文強, 數學證明, 蘇州教育出版社, 蘇州, 1985。
7. Morris Kline (克萊因) 著, 林炎全、洪萬生、楊康景松譯, 數學史−數學思想的發展 (*Mathematical Thought from Ancient to Modern Time*), 九章出版社, 臺北, 1983。
8. Simon Singh (賽門·辛) 著, 薛密譯, 費馬最後定理 (*Fermat's Last Theorem*), 臺灣商務印書館, 臺北, 1998。
9. Cynthia Hay (ed.)., *Mathematics from Manuscript to Print* 1300-1600, Oxford University Press, New York, 1998.
10. Frank Swetz, John Fauvel, Otto Bekken, Bengt Johansson and Victor Katz., *Learn From the Master*, The Mathematical Association of America, Washington, 1995.
11. Katz, Victor, J., *A History of Mathematics: An introduction*, Harper Collins College Publishers, New York, 1993.
12. Koger, B., Nelsen, Lewis and Clark College., *Proofs without words I: Exercises in visual thinking*, The Mathematical Association of America, Washington, 1993.
13. Paul J. Nahin., *An Emaginary Tale: the story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, New Jersey, 1998.
14. Sigler, L. E. tr., *The Book of Squares*, Academic Press, Inc, New York, 1987.
15. Sigler, L. E. tr., *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisan'o Book of Calculation*, Springer-Verlag, New York/ Berlin/ Heidelberg, 2002.

—本文作者為國立蘭陽女中數學教師, 國立清華大學歷史所博士班 (主修數學史)—