數學傳播 33卷2期, pp. 72-76

函數凸凹性的刻畫

馮育強

摘要: 函數的凸凹性在數學規劃, 數理經濟學, 不動點理論等學科中是非常重要的。從而如何來判定一個函數的凸凹性, 也就是一個有意義的事情, 本文給出了函數凸凹性的一種等價刻畫。

關鍵詞: 凸凹性、等價刻畫。

1. 引言

在北京清華大學 2007 級 “微積分” 期中試題中有這麼一個問題:

例1: 求常數 a 的範圍, 使得不等式 $\ln x \le a(x-1)$ 對於任何 $x>0$ 均成立。

爲了解決這個問題, 我們先來考慮一般的情況, 給出如下結論:

引理1.1. 設函數 $f: U \to R$ 在 $p \in U$ 點可導, 記

$$F(p)=\{c \in R | f(x)-f(p) \le c(x-p),\ \forall x \in U\}$$

則 $F(p) \neq \varnothing$ 時必有 $F(p)=\{f'(p)\}$。

證明: 由於 $F(p) \neq \varnothing$, 設 $c \in F(p)$, 則對於 $x \in U$, $x>p$ 有:

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \le c$$

令 $x \to p$ 就有 $f'(p) \le c$ 。而當 $x \in U$, $x<p$ 時同理易得 $f'(p) \ge c$ 。於是知引理結論成立。

下面就提出了一個問題: 在什麼情況下, $F(p) \neq \varnothing$。這與函數 $f(x)$ 的性質有關。有些函數, 如 $f(x)=x^2$ 在任何點都不滿足 $F(p) \neq \varnothing$。那麼什麼樣的函數能保證 $F(p) \neq \varnothing$? 這是我們要討論的主要問題。

2. 函數凸凹性的刻畫: 可導的情形

引理 2.1. 設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可導, 則 $F(p)\neq\varnothing, \forall p\in[a,b]$ 當且僅當 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲凹函數。(函數凸凹性的定義和基本性質見參考文獻 [1, 2])

證明: (1) 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲凹函數, 則由凹函數的幾何性質: 函數的圖像始終在其切線的下方, 可知對於給定點的 $p\in[a,b]$ 有:

$$f(x)\leq f(p)+f'(p)(x-p),\quad \forall x\in[a,b]$$

即得 $f'(p)\in F(p)$, 故知 $F(p)\neq\varnothing$。

(2) 若 $\forall p\in[a,b]$, $F(p)\neq\varnothing$ 則由引理 1 可知此時 $F(p)=\{f'(p)\}$, 從而對於給定的點 $p\in[a,b]$ 有:

$$f(x)\leq f(p)+f'(p)(x-p),\quad \forall x\in[a,b]$$

這表明函數的圖像始終在其切線的下方, 於是知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲凹函數。

此時, 可以對本文開頭提出的問題予以解答:

$x>0$ 時, 由於 $\ln x$ 爲凹函數, 故知滿足對於任何 $x>0$, $\ln x\leq a(x-1)$ 均成立的 a 存在且爲 $(\ln x)'_{x=1}=1$, 這只要注意到原不等式可寫爲 $\ln x-\ln 1\leq a(x-1)$。

對於凸函數, 我們有類似結論:

定理 2.2. 設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可導, 則 $F^0(p)\neq\varnothing$, $\forall p\in[a,b]$ 當且僅當 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲凸函數。其中 $F^0(p)=\{c\in R|f(x)-f(p)\geq c(x-p),\ \forall x\in[a,b]\}$。此時 $F^0(p)=\{f'(p)\}$。

由此, 我們不難解決這樣的一類問題:

例 2: 求常數 a 的範圍, 使得不等式 $x^2+e^x\geq ax+1$ 對於任何 $x\in R$ 均成立。

解: 令 $f(x)=x^2+e^x$, 易見 f 爲 R 上的凸函數且

$$x^2+e^x\geq ax+1$$

等價於
$$f(x)-f(0)\geq a(x-0)$$
故由定理 2.2 可知, 此時只有 $a=f'(0)=1$。

我們不難把這一結論推廣到多元函數的情形:

定理 2.3. 設函數 f 爲凸集 $D\subset R^n\to R$ 的可微函數, 則對於任意 $p\in D$, 集合

$$\{c\in R^n|f(x)-f(p)\geq\langle c,x-p\rangle,\ \forall x\in D\}$$

非空, 當且僅當 f 爲 D 內的凸函數, 且此時有 $c = gradf = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\Big)^T_{x=p}$。

證明: 充分性。設 f 爲凸集 D 內凸函數, 對任意 $x, p \in D$, $\alpha \in [0,1]$ 恒有

$$f(\alpha p + (1-\alpha)x) \le \alpha f(p) + (1-\alpha)f(x)$$

即
$$f(x) - f(p) \ge \frac{f(p+(1-\alpha)(x-p)) - f(p)}{1-\alpha}$$

兩邊取極限得

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &\ge \lim_{\alpha\to 1} \frac{f(p+(1-\alpha)(x-p)) - f(p)}{1-\alpha} \\ &= \langle gradf(p), x-p\rangle \end{aligned}$$

必要性. 設 $x_1, x_2 \in D$, $\alpha \in [0,1]$, $p = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, 則 $p \in D$。由題設, 存在 $c \in R$, 使得

$$f(x_1) - f(p) \ge \langle c, x_1 - p\rangle$$
$$f(x_2) - f(p) \ge \langle c, x_2 - p\rangle$$

第一式乘以 α 加上第二式乘以 $1-\alpha$ 可得

$$f(p) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

所以 f 爲 D 內的凸函數。

例3: 設 $x > 0$, $y \in R$ 時總有 $\dfrac{1}{x} + y^2 \ge ax + by + 2 - a - b$, 試求 a, b 的取值範圍。

解: 令 $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + y^2$, 注意到 $\dfrac{1}{x}$ 當 $x > 0$ 時爲凸函數, y^2 當 $y \in R$ 時爲凸函數, 則對於任意的 $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \{(x,y)|x>0, y\in R\}$, $\alpha \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1,y_1) + (1-\alpha)(x_2,y_2)) &= \frac{1}{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2} + (\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)^2 \\ &\le \alpha\frac{1}{x_1} + (1-\alpha)\frac{1}{x_2} + \alpha y_1^2 + (1-\alpha)y_2^2 \\ &= \alpha\Big(\frac{1}{x_1} + y_1^2\Big) + (1-\alpha)\Big(\frac{1}{x_2} + y_2^2\Big) \\ &= \alpha f(x_1,y_1) + (1-\alpha) f(x_2,y_2) \end{aligned}$$

即 f 爲 $\{(x,y)|x>0, y\in R\}$ 內的凸函數。

易見

$$\frac{1}{x} + y^2 \ge ax + by + 2 - a - b$$

等價於 $f(x,y)-f(1,1) \geq \langle (a,b),\ (x-1,y-1)\rangle$, 據定理 2.3 可知, 此時 a, b 存在且 $a=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=-1$, $b=\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=2$。

以上的討論均是基於 f 可導得到的, 如果去掉可導性質, 這種等價性是否成立? 這就是我們下一步要討論的問題。

3. 函數凸凹性的刻畫: 不可導的情形

定理 3.1. 設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有定義, 則 $F^0(p)\neq\varnothing$, $\forall p\in(a,b)$ 當且僅當 $f(x)$在 $[a,b]$ 上爲凸函數。其中 $F^0(p)=\{c\in R|f(x)-f(p)\geq c(x-p),\ \forall x\in[a,b]\}$。

證明: (1) 設 $F^0(p)\neq\varnothing$, 下證 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲凸函數

事實上, 任取 $c,d\in[a,b]$, 令 $p=\alpha c+(1-\alpha)d$, $\alpha\in[0,1]$, 任取 $r\in F^0(p)$, 則有

$$f(c)-f(p)\geq r(c-p),$$
$$f(d)-f(p)\geq r(d-p)$$

第一式乘以 α 加上第二式乘以 $1-\alpha$ 可得

$$\alpha f(c)+(1-\alpha)f(d)\geq f(p)$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲凸函數。

(2) 當 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲凸函數時, 我們來看一看 $\forall p\in(a,b)$, $F^0(p)$ 中有些什麼元素。

事實上, 任取 $x,y\in[a,b]$, $x<y$, 由凸函數的幾何性質可得

$$\frac{f(y)-f(p)}{y-p}\geq\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

由此知道 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ $(x\neq p)$ 是增函數, 且有上界, 現取 $x<p$, $x\to p$, 則 $g(x)$ 必有極限, 記爲 $f'_-(p)$, 且有 $\forall y\in(p,b]$, $\dfrac{f(y)-f(p)}{y-p}\geq f'_-(p)$。

另一方面函數 $h(y)=\dfrac{f(y)-f(p)}{y-p}$, (這裏 $y\in(p,b]$) 當 $y\to p$ 時, 函數值遞減, 且 $h(y)\geq f'_-(p)$, 於是知 $y\to p$ 時, 該函數極限存在, 記爲 $f'_+(p)$。

總結以上, 對於任意的 $x<p<y$, 均有

$$\frac{f(y)-f(p)}{y-p}\geq f'_+(p)\geq f'_-(p)\geq\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

從而易見此時 $F^0(p)=[f'_-(p),f'_+(p)]$。

例 4: $f(x)=|x|$ 時, f 爲凸函數, 但 f 在 0 點不可導, 此時不難算得 $F^0(0)=[-1,1]$。

同理我們有如下結論

定理 3.2. 設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有定義, 則 $F(p)\neq\varnothing$, $\forall p\in(a,b)$ 當且僅當 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲凹函數。其中 $F(p)=\{c\in R|f(x)-f(p)\leq c(x-p),\ \forall x\in[a,b]\}$。且此時 $F(p)=[f'_+(p),f'_-(p)]$。

參考文獻

1. 韓雲端, 扈志明, 張廣遠, 微積分教程 (上)(第2版), 清華大學出版社, 北京,2006
2. 劉玉璉, 傅沛仁, 數學分析講義 (上), 高等教育出版社, 北京, 2001.

—本文作者爲武漢科技大學理學院教師; 北京清華大學數學系訪問學者—