數學傳播 33卷2期, pp. 52-62

均值定理的統合與推廣

蔡聰明

在微積分中, Rolle 定理、Lagrange 的均值定理 (Mean-Value Theorem, 簡記爲 MVT), 以及 Cauchy 推廣的均值定理, 堪稱爲微積分的基石, 它們是僅次於微積分根本定理的重要定理。

本文我們要把它們統合在三元均值定理之下, 並且給出幾何解釋。進一步再推廣成 n 元與高維空間的均值定理。連貫的知識對於了解與學習都大有助益。

整個推演的出發點是:

定理 1: (Fermat 的內點極值定理, 1629 年)
設 $I \subset \mathcal{R}$ 爲一個區間, $f : I \to \mathcal{R}$ 爲一個函數, 並且 $x_0 \in I$。如果下列三個條件成立:
(i) x_0 爲 I 的內點;
(ii) $f(x_0)$ 爲 f 的極值;
(iii) f 在 x_0 點可微分。
那麼就有 $f'(x_0) = 0$。反之不然。

反例: 設 $f(x) = x^3$, $x \in \mathcal{R}$, 則 $f'(0) = 0$。我們觀察到: $x = 0$ 是內點, 且 f 在此點可微分, 但是 f 爲遞增函數, $f(0)$ 既不是極大值, 也不是極小值。這表示, 由 $f'(x_0) = 0$ 以及 (i) 與 (iii), 無法推導出 (ii)。

1. Rolle 定理

法國數學家 Rolle (1652−1719) 在解方程式時, 觀察到多項函數的行爲, 例如 $g(x) = x^2 - 5x + 6$ 及其導函數 $g'(x) = 2x - 5$ 的根之間具有密切關係:

在方程式 $g(x) = 0$ 的兩個根 $x = 2$ 與 $x = 3$ 之間, 必存在有
$c \in (2, 3)$ 是導函數方程式 $g'(x) = 0$ 的根, 此地 $c = 2.5$。

推而廣之, Rolle 就得到下面重要的結果。這只要利用連續函數的極值定理與 Fermat 的內點極值定理就可以證明。

定理 2: (Rolle 定理, 1690 年)
假設 $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ 爲一個函數。如果下列三個條件成立:
(i) f 在 $[a,b]$ 上連續;
(ii) f 在 (a,b) 上可微分;
(iii) $f(a) = 0 = f(b)$。
那麼就存在 $c \in (a,b)$, 使得 $f'(c) = 0$。

證明: 因爲 f 在 $[a,b]$ 上連續, 所以 f 在 $[a,b]$ 上取到最大值與最小值, 亦即存在 $\alpha, \beta \in [a,b]$, 使得

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta), \quad \forall\ x \in [a,b]$$

若 α 與 β 皆爲端點, 由 (iii) 知, f 爲常函數, 取值 0。因此, 任取 $c \in (a,b)$ 都有 $f'(c) = 0$。若 α 與 β 不皆爲端點, 不妨假設 α 爲內點 (β 爲內點的情形, 同理可證)。那麼由費瑪的內點極值定理就得到 $f'(\alpha) = 0$。最後, 我們選取 $c = \alpha$ 就好了。

註: (i) 與 (ii) 兩個條件可用 “f 在 $[a,b]$ 上可微分” 來取代。其次, (iii) 也可以改爲 $f(a) = f(b)$。

注意: 在 (ii) 中即使只有一點不可微分都不行! 例如 $f(x) = 1 - |x|$, $x \in [-1,1]$。

歷史故事: 在微積分草創期, 微積分建立在無窮小 (infinitesimal) 的論證上面, 無窮小有時等於 0, 有時又不等於 0, 這個矛盾難於說清楚。因此 Rolle 批評微積分是: 一堆智巧的錯誤集 (a collection of ingenious fallacies)。但在晚年他改變了態度, 視微積分爲一門有用的學問。

問 1: 甲乙兩人賽跑, 同時出發且同時抵達終點, 中間的過程互有快慢。試證必存在有某個時刻, 兩人具有相同的速度。

2. Lagrange 的均值定理

在 Rolle 定理中, 將端點的條件 (iii) 棄掉, 就得到下面推廣的重要結果:

定理 3: (Lagrange 的均值定理, MVT, 1797年)
假設 $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ 爲一個函數。如果下列兩個條件成立:
(i) f 在 $[a,b]$ 上連續;
(ii) f 在 (a,b) 上可微分;
那麼就存在 $c \in (a,b)$, 使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

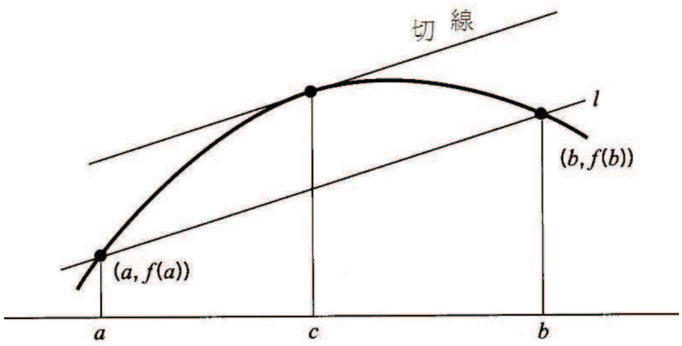
或者

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{2}$$

或者

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a). \tag{3}$$

用幾何直觀來說: 將割線 ℓ 平行移動, 終至切曲線於 $(c, f(c))$ 點。



註: (i) 與 (ii) 兩個條件可用 "f 在 $[a, b]$ 上可微分" 來取代。另外, c 點可以表成 $c=a+\theta(b-a)$ 之形式, 其中 $0<\theta<1$; Rolle 定理亦然。又注意, 在 (ii) 中即使只有一點不可微分都不行。

在均值定理中, 若再要求 $f(a)=f(b)=0$ 的條件, 那麼就變成 Rolle 定理。因此, 均值定理是 Rolle 定理的推廣, 並且可用 Rolle 定理來證明。因此, 兩者在邏輯上等價!

另外, 這個定理的一個意思是, 可用有限步驟的演算式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 來取代無窮步驟的演算式 $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, 但是必須付出 c 不明確的代價。

推論: (不等號形式的均值定理)
假設 f 在 $[a, b]$ 上可微分並且 $|f'(x)|\leq K, \forall\, x\in(a, b)$, 則有

$$|f(b)-f(a)|\leq K\cdot(b-a).$$

顯然常函數的微分爲 0, 反過來也成立, 但這不顯然, 並且要小心敍述。因爲階梯函數 $f(x)=[x]$ 在可微分處, 皆有 $f'(x)=0$, 但它不是常函數。下面定理是 MVT 的簡單結論。

定理 4: (微分方程根本補題)
若 $f'(x)=0, \forall\, x\in(a, b)$, 則 f 在 (a, b) 上爲常函數。

註: 運動學的解釋: 速度恆爲 0的質點, 是靜止不動的, 從而位置不變。

這個定理可以用來確認一階微分方程 $y'(t)=\alpha y(t)$ 解答的形貌, 故稱爲微分方程根本補題。我們都知道 $y=Ce^{\alpha t}$ 是這個微分方程的解答。問還有沒有其它形式的解答? 沒有! 證明如下:

假設 y_1 爲任意解答, 故有 $dy_1/dt=\alpha y_1$。考慮函數 $y_1/e^{\alpha t}$, 微分得到 $D(y_1/e^{\alpha t})=(y_1'e^{\alpha t}-y_1\alpha e^{\alpha t})/e^{2\alpha t}=0$。因此, $y_1/e^{\alpha t}=C$, 常數。從而 $y_1=Ce^{\alpha t}$。

故事: 俄國物理學家 Kapitza 提出如下的問題:「將炒菜盤綁在狗的尾巴上, 當狗向前跑時, 炒菜盤就會因爲接觸地面而發出聲音, 若要使炒菜盤不發出聲音, 問如何辦到? 」許多物理學家想不出答案, 最後 Kapitza 公佈答案: 讓狗跑動的速度爲 0 ! 速度爲 0是運動的特例。

推論: 若 $f'(x)=g'(x), \forall\, x\in(a,b)$, 則 $f-g$ 在 (a,b) 爲常數; 亦即

$$f(x)=g(x)+C,\quad \forall\, x\in(a,b).$$

定理5: (定積分的均值定理)
設 f 在 $[a,b]$ 上連續, 則存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)\quad \text{或}\quad f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

定理6: 假設 f 定義在 $[a,b]$ 爲連續可微分, 則下列兩敍述等價:

(i) Newton-Leibniz 公式 (N-L 公式): $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx=f'(c)(b-a)$。

(ii) Lagrange 的均值定理: 存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$。

證明: (i) $\Rightarrow$ (ii): 將 N-L 公式 $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$ 以及積分的均值定理: 存在 $c\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f'(x)dx=f'(c)(b-a)$, 兩者結合起來就得到 Lagrange 的均值定理 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$。

(ii) $\Rightarrow$ (i): 對 $[a,b]$ 作分割: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$。將 f 對一分割小段 $[x_{k-1},x_k]$ 使用 Lagrange 均值定理, 得知存在 $c_{k-1}\in(x_{k-1},x_k)$ 使得

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(c_{k-1})(x_k-x_{k-1}).$$

作 Riemann 和得到

$$\sum_{k=1}^n f'(c_{k-1})(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^n\Big[f(x_k)-f(x_{k-1})\Big]=f(b)-f(a)$$

取極限就得到 N-L 公式:

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a).$$

N-L 公式與 MVT 最重要且美麗的推廣就是下面的 Taylor 定理:

定理7: (Taylor 定理, 1715年)
假設 f 定義在 (a,b) 上, 具有直到 $n+1$ 階連續可微分, $x_0 \in (a,b)$, 則

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \quad \forall\ x \in (a,b) \tag{5}$$

其中

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

叫做在 x_0 點的第 n 階 Taylor 多項式, 並且剩餘項可以表爲積分形式:

$$R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \tag{6}$$

也可以表爲微分形式:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{7}$$

其中 c 爲介於 x_0 與 x 之間的一個數。這叫做 Lagrange 形式的剩餘項。

註: 當 $n=0$ 時, (5) 式的積分剩餘項與微分剩餘項分別化約爲 N-L 公式以及 MVT。

3. 均值定理的推廣

均值定理只涉及一個函數, 現在從一個函數變成兩個, 作「兩元化」之推廣, 我們就得到下面的重要結果:

定理8: (Cauchy 的兩元均值定理, 1821年)
(i) 假設 $f, g: [a,b] \to \mathcal{R}$ 爲兩個連續函數並且在 (a,b) 上可微分。
那麼就存在 $c \in (a,b)$, 使得

$$[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c). \tag{8}$$

(ii) 若進一步再要求 $g'(t) \neq 0, \forall\ t \in (a,b)$ 那麼就存在 $c \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{9}$$

上述 (8) 與 (9) 兩式都叫做 Cauchy 公式。

註1: 根據 Rolle 定理, 條件 $g'(x) \neq 0, \forall\ x \in (a,b)$, 保證了 $g(b)-g(a) \neq 0$。

註2: 取 $g(t)=t$, $g'(t)=1$, 則推廣的均值變率定理就變成均值定理。

Cauchy 的兩元均值定理是 L'Hopital 規則的理論基礎, 這是探求不定型極限的有力工具。

4. 三元化的統合觀點

上述是從 "特殊" 逐漸走到 "一般" 的情形, 而 Rolle 定理是核心。我們再採用「三元化」的觀點, 涉及到三個地位相同的函數, 並且利用行列式的工具來表達, 就得到推廣的三元均值定理, 統合了上述所有的均值定理。

定理9: (推廣的三元均值定理)
假設函數 f, g, h 在 $[a,b]$ 上連續並且在 (a,b) 上可微分, 令

$$F(t)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(t) \\ g(a) & g(b) & g(t) \\ h(a) & h(b) & h(t) \end{vmatrix}, \quad \forall\, t\in[a,b]$$

則存在 $c\in(a,b)$, 使得 $F'(c)=0$, 亦即

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

或者

$$\begin{aligned} f'(c)[g(a)h(b)-h(a)g(b)]+g'(c)[h(a)f(b)-f(a)h(b)] \\ +h'(c)[f(a)g(b)-g(a)f(b)]=0. \end{aligned} \tag{11}$$

證明: 顯然 F 在 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 上可微分, 並且 $F(a)=F(b)=0$。由 Rolle 定理得知, 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $F'(c)=0$。

函數 $F(t)$ 與定理 9有幾何上的解釋:
考慮三維空間中的參數曲線

$$\Gamma: x=f(t), y=g(t), z=h(t) \quad t\in[a,b]$$

其上三點 $(f(a),g(a),h(a))$, $(f(b),g(b),h(b))$, $(f(t),g(t),h(t))$, 形成三個從原點出發的位置向量:

$$\begin{aligned} &\vec{u}=f(a)\vec{i}+g(a)\vec{j}+h(a)\vec{k}, \quad \vec{v}=f(b)\vec{i}+g(b)\vec{j}+h(b)\vec{k} \\ &\vec{w}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

它們所張出平行六面體, 其有號體積就是 $F(t)$。我們欲求 $F(t)$ 的極值。令 $\pi(\vec{u},\vec{v})$ 表示由 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 所張出的平面, 曲線 Γ 由 $(f(a),g(a),h(a))$ 點出發到達 $(f(b),g(b),h(b))$, 我們只要在曲線 Γ 上找一點 $(f(c),g(c),h(c))$, 使得距離平面 $\pi(\vec{u},\vec{v})$ 爲最遠或最近, 就有 $F'(c)=0$。

推論 1: (Cauchy 的兩元均值定理)
在定理 9的假設下, 並且取 $h(t)\equiv 1$, 則存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

亦即

$$[f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c).$$

進一步, 若再假設 $g'(x)\neq 0, \forall\, x\in(a,b)$, 則上式可寫成

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

推論 2: (Lagrange 的均值定理, MVT)
在定理 9的假設下, 並且取 $h(t)\equiv 1$ 與 $g(t)=t$, 則存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ a & b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

亦即

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

推論 3: (Rolle 定理)
在定理 9的假設下, 並且取 $h(t)\equiv 1$, $g(t)=t$ 且 $f(a)=f(b)=0$, 則存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & f'(c) \\ a & b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

亦即 $f'(c)=0$。

值得注意的是, 定理 9以及上述三個推論在邏輯上都是等價的, 一般結果等價於特例! 這在數學中是常見的事情, 但是對於初學者卻仍然會覺得很驚奇。另一個例子: 勘根定理是中間值定理的特例, 但兩者在邏輯上也是等價的。

定理 9統合了 Cauchy 的兩元均值定理, Lagrange 的均值定理以及 Rolle 定理爲特例, 並且它的證明極其簡潔, 簡直是一行就證明完成。定理 9含納無窮, 簡直比太平洋還要壯觀。這恰好應驗了法國數學家 A. Weil 的一句名言:

更普遍與更簡潔是結伴同行的。

(Greater generality and greater simplicity go hand in hand.)

5. 四元化的推廣

定理10: (推廣的四元均值定理)
假設函數 f, g, h, k 在 $[a,b]$ 上連續, $a < x_0 < b$。令

$$G(t)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x_0) & f(b) & f(t)\\ g(a) & g(x_0) & g(b) & g(t)\\ h(a) & h(x_0) & h(b) & h(t)\\ k(a) & k(x_0) & k(b) & k(t)\end{vmatrix},\quad \forall\ t\in[a,b].$$

(i) 若 f, g, h, k 在 (a,b) 上可微分, 則存在 $\alpha, \beta, a<\alpha<x_0<\beta<b$, 使得 $G'(\alpha)=0=G'(\beta)$。

(ii) 進一步, 若 f, g, h, k 在 (a,b) 上爲二階可微分, 那麼就存在 $c\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, 使得 $G''(c)=0$, 亦即

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(x_0) & f(b) & f''(c)\\ g(a) & g(x_0) & g(b) & g''(c)\\ h(a) & h(x_0) & h(b) & h''(c)\\ k(a) & k(x_0) & k(b) & k''(c)\end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

這由 Rolle 定理立即就得證。我們觀察定理 10的一個特例:

特例: (二階導數的均值定理)
在定理 10裡, 假設 f 爲二階可微分, 並且取 $k(t)\equiv 1$, $h(t)=t$, $g(t)=t^2$, 則存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$G''(c)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x_0) & f(b) & f''(c)\\ a^2 & x_0^2 & b^2 & 2\\ a & x_0 & b & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

從而

$$\frac{\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x_0-b}=\frac{1}{2}f''(c).$$

此式可看作是二階導數的均值公式。

6. n 元化的推廣

上述定理 10又可以再推展到 n 個函數的情形, 採用 Rolle 定理就可得證。

定理 11: (推廣的 n 元均值定理, $n\geq 3$)
假設 n 個函數 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ 在 $[a,b]$ 上連續, $a<x_0<x_1<\cdots<x_{n-3}<b$。令

$$H(t)=\begin{vmatrix} f_1(a) & f_1(x_0) & \cdots & f_1(b) & f_1(t)\\ f_2(a) & f_2(x_0) & \cdots & f_2(b) & f_2(t)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ f_n(a) & f_n(x_0) & \cdots & f_n(b) & f_n(t)\end{vmatrix},\ t\in[a,b].$$

第 1層: 若 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ 在 (a,b) 上可微分, 則存在 $c_{1,1}<c_{1,2}<\cdots<c_{1,n-2}$ 使得 $a<c_{1,1}<x_0<c_{1,2}<x_1<c_{1,3}\cdots<x_{n-3}<c_{1,n-2}<b$, 並且

$$H'(c_{1,k})=0,\quad k=1,\ldots,n-2.$$

第 2層: 進一步, 若 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ 在 (a,b) 上為二階可微分, 那麼就存在 $c_{2,1}<c_{2,2}<\cdots<c_{2,n-3}$, 使得 $c_{1,1}<c_{2,1}<c_{1,2}<c_{2,2}<c_{1,3}\cdots<c_{1,n-3}<c_{2,n-3}<c_{1,n-2}$, 並且 $H''(c_{2,k})=0$, $k=1,\ldots,n-3$。
繼續不斷做下去⋯⋯⋯
第 $n-2$ 層: 最後, 若 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ 在 (a,b) 上為 $n-2$ 階可微分, 那麼就存在 $c_{n-2,1}$, 使得 $a<c_{n-1,1}<c_{n-2,1}<c_{n-1,2}<b$, 並且 $H^{(n-2)}(c_{n-2,1})=0$。

7. 高維空間的推廣

另一方面, 在高等微積分裡, 定義在高維空間上的實值或向量值的多變數函數 f, 還有各式各樣的均值定理, 我們分成 $f:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$ 與 $f:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}^m$ 兩種情形來討論。

定理 12: (高維空間的均值定理)
(i) 假設函數 $f:U\subset\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$ 在開集 U 上可微分。令 a 與 b 皆屬於 U 且連結它們的線

段 $L(a,b)$ 也都落在 U 裡。那麼存在一點 $c=a+t_0(b-a)$, 其中 $0<t_0<1$, 使得

$$f(b)-f(a)=\nabla f(c)\cdot(b-a). \tag{16}$$

(ii) 假設 $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m):U\subset\mathcal{R}^{\,n}\to\mathcal{R}^{\,m}$ 在開集 U 上可微分, 線段 $L(a,b)$ 落在 U 裡, 則存在 $c_1,\ldots,c_m$ 屬於線段 $L(a,b)$, 使得

$$f_k(b)-f_k(a)=\nabla f_k(c_k)\cdot(b-a),\quad k=1,2,\ldots,m.$$

證明: (i) 考慮函數 $g(t)=f[a+t(b-a)]$, 對 g 在 $[0,1]$ 上使用 Lagrange 均值定理與連鎖規則就好了。(ii) 對於每個分量 f_k 皆分別使用 (i) 就得證。

對於 (ii) 的情形, 美中不足的是, 其中落在線段上的諸點 $c_k\in L(a,b)$ 對每個分量函數 f_k 皆不同。因此我們無法期盼如 (16) 式具有共同點之結果, 對所有函數 $f:A\subset\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}^m$ 都成立。

反例: 假設 $f_1(x)=\cos x$, $f_2(x)=\sin x$, 並且選取 $a=0$, $b=2\pi$。考慮函數 $f=(f_1,f_2):[0,2\pi]\to\mathcal{R}^{\,2}$, 則 (16) 式之形的均值定理不成立。

修改爲不等式形式的均值定理是可行之道。

定理 13: (高維空間不等式形式的均值定理)
假設 $U\subset\mathcal{R}^{\,n}$ 爲開集, $f:U\to\mathcal{R}^{\,m}$ 爲可微分函數。令 a 與 b 皆屬於 U 且連結它們的線段 $L(a,b)$ 也都落在 U 裡。再假設

$$\|Df(x)\|\le M,\quad \forall\ x\in L(a,b)$$

其中 $\|\ \|$ 表示線性算子的範數 (norm)。那麼我們就有

$$\|f(b)-f(a)\|\le M\cdot\|b-a\|. \tag{17}$$

證明: 考慮函數 $g(t)=f[a+t(b-a)]$, $t\in[0,1]$。利用連鎖規則, 作微分得到 $\dfrac{d}{dt}f[a+t(b-a)]=Df[a+t(b-a)]\cdot(b-a)$。對 t 從 $t=0$ 積分到 $t=1$ 得到

$$f(b)-f(a)=\int_0^1\Big\{Df[a+t(b-a)]\cdot(b-a)\Big\}dt$$

此地的積分是對各成份函數來定義。現在取範數, 因爲積分的範數小於等於範數的積分, 就得到 (17) 式。

將定理13 中的高維歐氏空間改爲更廣泛的賦範向量空間 (normed vector space), 結果仍然成立。

下面我們給出均值定理的一個重要用途:

定理 14: 假設 $U \subset \mathcal{R}^{\,n}$ 爲連通的開集, 並且 $f : U \to \mathcal{R}^{\,m}$ 爲可微分函數。如果 $Df(x) = 0, \forall\, x \in U$, 則 f 爲常函數。

證明: 取定一點 $a \in U$, 並且令 $V = \{b \in U | f(b) = f(a)\}$, 即 $V = f^{-1}(a)$。因爲 f 爲連續函數, 故 V 爲 U 中的閉集。另一方面, 因爲 U 爲開集, 故對於每個 $x \in V \subset U$, 都存在開的球 B, 半徑大於 0 且被包含於 U 中。這個球 B 是凸集 (convex set), 由定理13 知, $f(y) = f(x) = f(a), \forall\, y \in B$。從而 V 也是 U 中的開集。今因 U 爲連通集, 而連通集中沒有既開且閉的眞子集, 所以 $V = U$。

8. 結語

將數學結果連貫成有機整體, 使得沒有一片知識是孤立的, 這是數學美的要素之一。在微積分裡, 均值定理的知識網是一個著名的例子, 其中 Rolle 定理是核心樞紐!

最後我們整理出本文所涉及的定理之邏輯網絡 (logical net):

n 元均值定理
$\vdots$
Taylor 定理　　　三元均值定理
$\swarrow$　$\searrow$　　$\swarrow$　$\downarrow$　$\searrow$
N-L 公式 $\Leftrightarrow$ Lagrange 均值定理 $\Leftrightarrow$ Rolle 定理 $\Leftrightarrow$ Cauchy 兩元均值定理
$\uparrow$　　　$\nearrow$　　$\nwarrow$
積分的均值定理　　Fermat 內點極值定理　　連續函數極值定理

參考文獻

1. Gabriel Klambauer, *Aspects of Calculus*, Springer-Verlag, 1986.
2. E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, 1996.
3. James R. Munkres, *Analysis on Manifold*, Addison-Wesley, 1991.
4. J. E. Marsden and M. J. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 1974.
5. A. Avez, *Differential Calculus*, John Wiley and Sons, 1986.
6. 黃見利, 均值定理的一個有趣的幾何意義, 數學傳播, 29卷 2期, 2005。

—本文作者爲台大數學系退休教授—