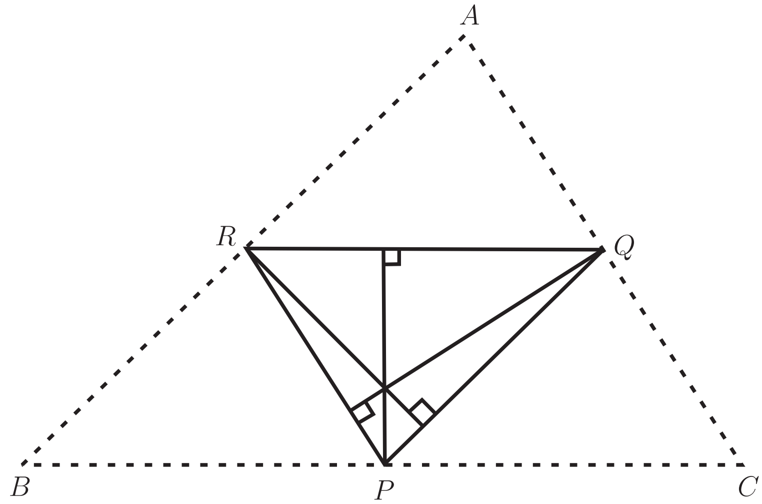
數學傳播 33卷2期, pp. 48-51

從旋轉及縮放看尤拉線與九點圓

張海潮

自 Euler (1707～1783) 發現尤拉線, Poncelet (1788～1867) 證明九點圓以來, 相關的論文無數; 本文絕非創見, 只能算是個人的讀書筆記。

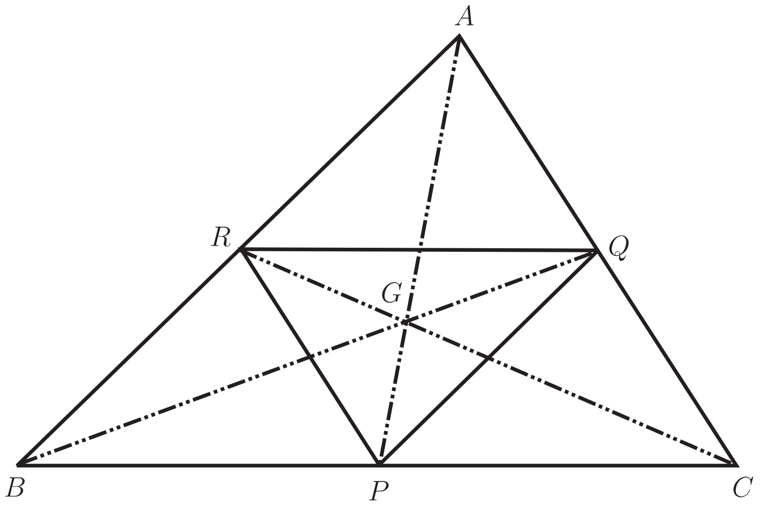
重心、內心、外心與垂心是三角形的四心, 前三心的物理或幾何的意義明顯, 比較容易掌握; 至於垂心, 指的是三高的共同交點, 論證通常要借重縮放關係, 請看圖一:



圖一

圖中, P, Q, R 三點是 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 三邊的中點, 不難發現 $\triangle PQR$ 的垂心剛好是 $\triangle ABC$ 的外心。借重 $\triangle ABC$ 的外心, 可以證明 $\triangle PQR$ 的三高共點。

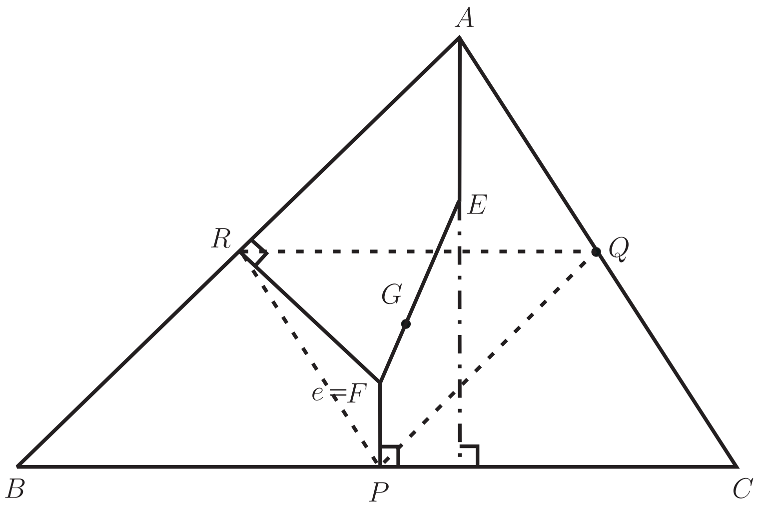
易見圖一中的 $\triangle PQR$ 與 $\triangle ABC$ 相似, 邊長是 $\triangle ABC$ 的一半。不過細究起來, $\triangle PQR$ 和 $\triangle ABC$ 的位置上下顛倒, 不是單純的縮放, 縮放之外, 還需加上旋轉, 請看圖二:



圖二

如圖, 令 P, Q, R 分別爲 $\triangle ABC$ 三邊的中點, 並令 G 爲 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 的共同重心, 由相關位置可以看出 $\triangle PQR$ 正是 $\triangle ABC$ 繞重心 G 旋轉 $180°$ 之後再縮小一半的結果。注意到在旋轉繼以縮放的過程中, 角度的關係不變 (註一)。

現在考慮 $\triangle ABC$ (大三角形) 的垂心 E、外心 F 和重心 G, 以及 $\triangle PQR$ (小三角形) 的垂心 e、外心 f 和重心 G, 請看圖三:



圖三

由前段的討論知, 若將 $\triangle ABC$ 繞 G 旋轉 $180°$ 之後再縮小一半, 就會得到 $\triangle PQR$; 並且由於旋轉和縮放時角度的關係不變, $\triangle ABC$ 的垂心 E 自然變換到 $\triangle PQR$ 的垂心 e, 但是由於 e 同時也是 $\triangle ABC$ 的外心 F, 所以 E, G, F 三點共線並且 $\overline{EG}=2\overline{GF}$; 又因 $\overline{EA}$ 透過旋

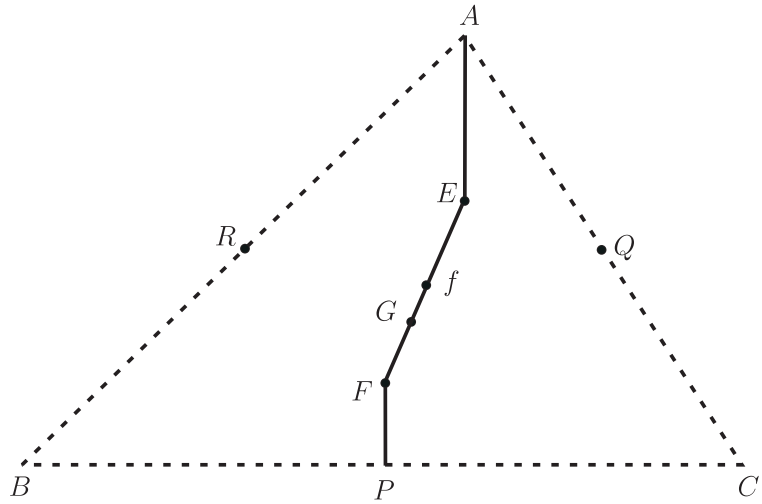
轉和縮小一半之後, 變換到 $\overline{FP}$, 因此 $\overline{EA}=\overline{FP}$。結論是 (註二):

(1) 三角形的垂心 E、重心 G、外心 F 依序共線 (稱爲尤拉線)

(2) $\overline{EG}=2\overline{GF}$

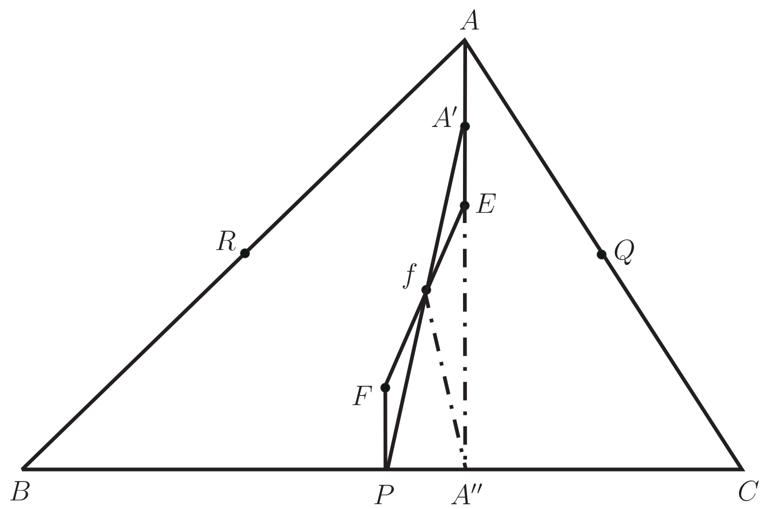
(3) $\overline{EA}=2\overline{FP}$

接著再將圖三中 $\triangle ABC$ 的外心 F 繞 G 旋轉 180° 之後再縮小一半, 得到 $\triangle PQR$ 的外心 f (圖四)。



圖四

由於 $\overline{EG}=2\overline{GF}=4\overline{Gf}$, 易見 f 是 $\overline{EF}$ 的中點。由結論 (3), $\overline{EA}=2\overline{FP}$, 因此若將 $\overline{Pf}$ 延長之後, 會交到 $\overline{AE}$ 的中點 A', 並且有 $\overline{Pf}=\overline{fA'}$ (圖五)。



圖五

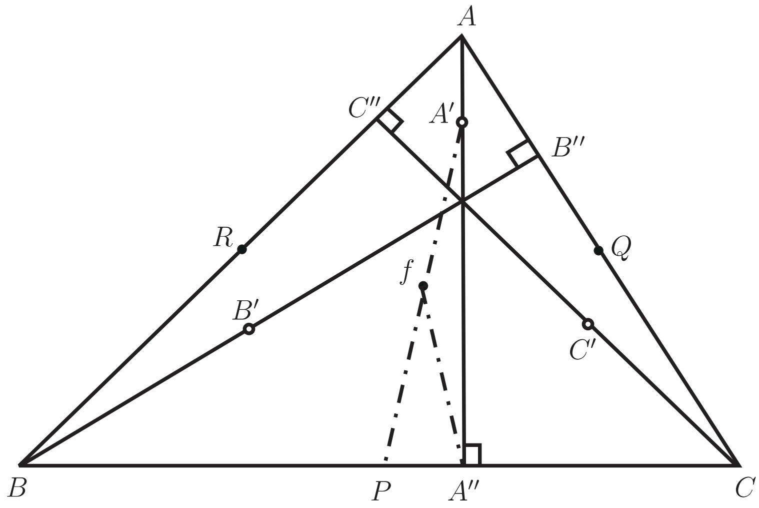
注意到在直角三角形 $\triangle PA''A'$ 中, f 是斜邊 $\overline{PA'}$ 的中點, 所以有

(4) $\overline{fA''} = \overline{fA'} = \overline{fP}$。

記得 f 是 $\triangle PQR$ 的外心, 根據 (4), 加上對稱的考量, 可以看出, 以 f 爲圓心, $\overline{fP}$ 爲半徑的圓會通過下列九個點 (圖六):

$\triangle ABC$ 三邊的中點 P, Q, R; $\triangle ABC$ 三高的垂足 A'', B'', C'';

$\triangle ABC$ 垂心到三頂點連線段的中點 A', B', C'。



圖六

這個圓稱爲九點圓 (註三)。

註一. 本文談及的旋轉, 均爲繞重心 G 旋轉 $180°$; 縮放均指以 G 爲中心的縮放。

註二. 笹部貞市郎, 幾何學辭典, P.102, 第500條, 台北九章出版社。

註三. 同註二, 笹部貞市郎, 幾何學辭典, P.137, 第675條。

—本文作者爲台大數學系退休教授—