數學傳播 33卷2期, pp. 27-47

如何計算圓錐曲線的切線

羅驥韡

計算圓錐曲線的切線方程式, 一直是個難題, 尤其是對一般高中生的程度來說, 更何況針對不同的圓錐曲線 (橢圓、拋物線、雙曲線等) 而言, 又有不同的切線公式, 感覺上既不統一又難以記憶, 所以我在這裡要介紹一種算法, 一種統一的算法, 讓你不管面對何種圓錐曲線, 都可以直接應用的公式。

圓錐曲線方程式

在座標平面上, 我們知道, 不管是哪一種圓錐曲線, 都可以表示爲以下的形式:

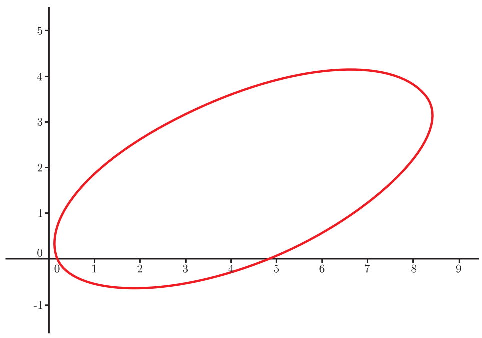
$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

例如:

(1) 橢圓: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$, 我們可以寫成: $x^2+4y^2-4=0$。
(2) 拋物線: $y^2=4(x-1)$, 我們可以寫成: $y^2-4x+4=0$。
(3) 雙曲線: $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{3}=1$, 我們可以寫成: $3x^2-y^2-3=0$。

當然上面所舉的例子都是所謂的「標準式」, 也就是這些圓錐曲線在座標平面上的位置都是經過特別安排的, 所以方程式會看起來特別漂亮簡潔。

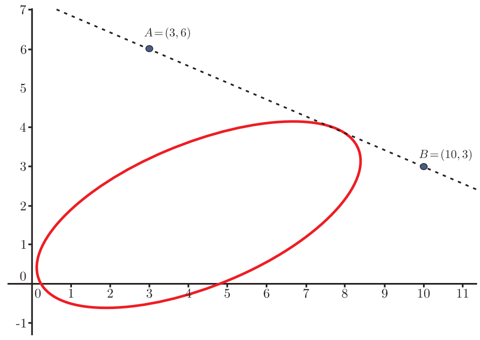
一般說來, 如果圓錐曲線沒有在「標準位置」的話, 那麼它的方程式就會看起來有點複雜, 例如: $x^2-2xy+3y^2-5x-2y+1=0$, 它的圖形會像右圖一樣。



如何判斷一條通過特定兩點的線是不是切線呢?

例題 1: 我在上面的圓錐曲線中, 再加入兩個點 $A(3,6)$ 與 $B(10,3)$, 那麼連接這兩點的直線到底是不是切線呢?

解答: 要回答這樣的問題, 我們可以利用直線的參數式來測試看看, 到底這個直線與圓錐曲線有幾個交點, 以下我們就來計算看看:



首先, 通過 AB 兩點的直線參數式爲:

$$\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$$

我們將這組點座標代入圓錐曲線方程式 $x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x - 2y + 1 = 0$, 得到:

$$(3+7t)^2 - 2(3+7t)(6-3t)^2 - 5(3+7t) - 2(6-3t) + 1 = 0$$

化簡得:

$$118t^2 - 161t + 55 = 0$$

計算它的判別式可以得到:

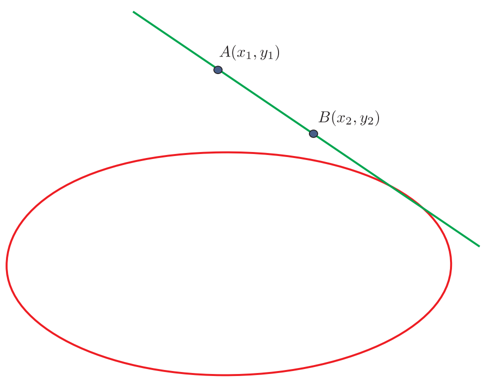
$$(161)^2 - 4(118)(55) = -33 < 0$$

所以由判別式小於零, 我們可以知道上述的直線與圓錐曲線沒有任何交點(雖然圖形上看起來「好像」切到, 但事實上, 精確的計算告訴我們並沒有)。

一般說來, 要判斷一條通過特定兩點的線是不是切線, 都可以利用上述的方法來達成。既然這個方法這麼好用, 那麼我們何不利用這樣的思考模式, 發展出一些好用的公式或判斷的法則呢? 沒錯! 這正是我們這篇文章的目的, 所以我們就繼續往下探索看看吧!

探索切線的公式或準則

假設直線通過 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 兩點, 圓錐曲線爲 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, 那麼我們利用上述同樣的方法來計算看看, 直線參數式與圓錐曲線之間, 有沒有任何交點。



首先, 直線參數式爲:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

然後, 我們將這組座標代入圓錐曲線方程式, 得到:

$$a[x_1+(x_2-x_1)t]^2+b[x_1+(x_2-x_1)t][y_1+(y_2-y_1)t]+c[y_1+(y_2-y_1)t]^2$$
$$+d[x_1+(x_2-x_1)t]+e[y_1+(y_2-y_1)t]+f=0$$

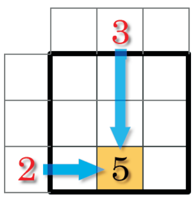
如果我們將上面的計算式整理成 t 的二次式, 會得到:

$$[a(x_2-x_1)^2+b(x_2-x_1)(y_2-y_1)+c(y_2-y_1)^2]\cdot t^2$$
$$+[2ax_1(x_2-x_1)t]+bx_1(y_2-y_1)+by_1(x_2-x_1)+2cy_1(y_2-y_1)+d(x_2-x_1)+e(y_2-y_1)]\cdot t$$
$$+[ax_1^2+bx_1y_1+cy_1^2+dx_1+ey_1+f]=0$$

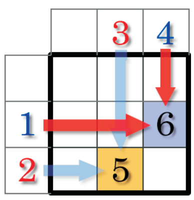
當然, 如果我們要計算這個二次式到底有沒有解, 還要計算它的判別式, 這時你或許會想: 天啊! 它的係數已經如此複雜了, 我們竟然還想去計算它的判別式? 就算我們眞的花了九牛二虎之力把它算出來了, 難道我們還會想去記憶它或應用它嗎? 的確, 我們是遇上了瓶頸, 我們遇到變數符號太多太長、複雜難以處理的窘境。然而, 正是因爲面對這樣的窘境, 才讓數學家了解到: 必須開發新的符號與新的運算規則, 讓我們可以繞過複雜計算的深淵, 繼續邁向推理解題的大道。以下我們就來介紹這個新的利器。

開發新的運算符號

首先, 我們先來介紹一種「表格式乘積加總法」:



在左邊的表格中, 2 所在的那一橫列與 3 所在的那一直行, 對到了數字 5, 這時我們規定: 2、3、5要乘起來, 也就是會得到 $2\times3\times5=30$



我們在左表中, 又多放了一些數字上去, 現在我們要計算 $2\times3\times5$ 和 $1\times4\times6$, 並把它們加總起來, 所以其實我們要計算的是: $2\times3\times5+1\times4\times6=30+24$

	1	3	4
0	-1	-2	7
1	0	8	6
2	-4	5	0

在這個例子中, 我們填上所有的數字, 並利用上面說明的方式將所有的乘積全部加起來。首先, 我們先將左側的數字 0, 1, 2 和上側的數字 1, 3, 4 乘到格子裡, 可以得到右表中的數字:

0	0	0
0	24	24
-8	30	0

最後, 我們只要將表格中所有的數字加起來, 那麼所得到的數字就是我們想要計算的總和, 也就是: $24+24-8+30=70$

這就是我們所說的「表格式乘積加總法」。

當然, 如果你學過「矩陣 」乘法, 你會知道我們這裡所謂的「表格式乘積加總法」, 其實可以用矩陣來表示。例如: 上面所舉的最後一個例子, 可以利用矩陣乘法:

$$[0\ \ 1\ \ 2]\begin{bmatrix}-1 & -2 & 7\\ 0 & 8 & 6\\ -4 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} \text{來表示。}$$

不過, 如果你沒學過矩陣, 那也沒關係, 請繼續看我們以下的討論就可以了。

我們這裡爲什麼要介紹這樣「怪異的加總法」呢? 主要是因爲這種加總法剛好跟圓錐曲線的方程式有某種巧妙的連結。請看以下的例子:

	x	y	1
x	-1	-2	7
y	0	8	6
1	-4	5	0

在左表中, 如果我們運用「表格式乘積加總法」, 那麼我們會得到:

$-x^2-2xy+8y^2+3x+11y+0$

請讀者注意看: 這剛好是圓錐曲線方程式

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

等號左邊的形式, 這也正是爲什麼我們要介紹這種加總法的原因。

	x	y	1
x	a	$b/2$	$d/2$
y	$b/2$	c	$e/2$
1	$d/2$	$e/2$	f

如果我們在表格中設定了像左表一樣的數字 (請注意裡面的 $\dfrac{b}{2}$、$\dfrac{d}{2}$、$\dfrac{e}{2}$), 那麼我們就會得到與圓錐曲線一般式 (等號左邊)一模一樣的形式:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$$

	x_2	y_2	z_2
x_1	a	b	c
y_1	d	e	f
z_1	g	h	i

最後, 爲了靈活運用這樣的計算法, 我們把最通用的形式寫出來, 並且徹底研究這種運算法的規則, 才能順利地用於後面的解題推理中。但是, 我們總不能每次都用畫表格的方式來表現, 所以在這裡我們假設:

$$M=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\qquad P=(x_1,y_1,z_1)\qquad Q=(x_2,y_2,z_2)$$

並且, 我們規定新的符號:

$$[P,Q]_M$$

就代表左表所表示的「表格式乘積總和」, 也就是:

$$
\begin{aligned}
[P,Q]_M = \;& ax_1x_2+bx_1y_2+cx_1z_2 \\
& +dy_1x_2+ey_1y_2+fy_1z_2 \\
& +gz_1x_2+hz_1y_2+iz_1z_2
\end{aligned}
$$

新符號的定義

$$
\begin{aligned}
[P,Q]_M &= \begin{array}{c|ccc} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \hline x_1 & a & b & c \\ y_1 & d & e & f \\ z_1 & g & h & i \end{array} \\
&= ax_1x_2+bx_1y_2+cx_1z_2 \\
&\quad +dy_1x_2+ey_1y_2+fy_1z_2 \\
&\quad +gz_1x_2+hz_1y_2+iz_1z_2
\end{aligned}
$$

究竟這樣的新符號有什麼漂亮的運算規則呢? 請看以下的說明:

新符號的運算性質

假設我們除了上述的新符號之外, 我們也引用一般的「向量加法」與「純量積」的運算概念, 也就是下列的運算規則:

(1) 若 $P=(x_1,y_1,z_1)$, $Q=(x_2,y_2,z_2)$, 則 $P+Q$ 代表 $(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

(2) 若 $P=(x,y,z)$, t 爲實數, 則 tP 代表 (tx,ty,tz)。

那麼, 我們所使用的新符號就會有以下的運算規則:

假設 $P=(x_1,y_1,z_1)$、$Q=(x_2,y_2,z_2)$、$R=(x_3,y_3,z_3)$, t 爲實數, 則有

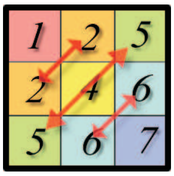
(1) 加法分配律:

$[P+Q,R]_M=[P,R]_M+[Q,R]_M$ 或 $[P,Q+R]_M=[P,Q]_M+[P,R]_M$

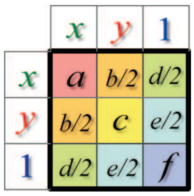
(2) 純量積:

$[tP,Q]_M=t[P,Q]_M=[P,tQ]_M$

一般而言,「交換律」並不成立, 也就是 $[P,Q]_M=[Q,P]_M$ 通常是錯的, 但如果 M 是「對稱」的, 那麼交換律也會是正確的。但我們說 M 是「對稱」的, 指的是什麼意思呢? 在這裡我舉個例子:



左表中, 數字 1、4、7 所在的位置, 我們術語上稱為矩陣 的「主對角線」, 在這主對角線的兩側的「格子對」(如圖中紅色的箭頭所指的三對格子), 如果都各自相同, 那麼我們就說: 這個矩陣是「對稱」的。



左表中, 如果我們假設:

$$M=\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \qquad P=(x,y,1)$$

那麼, 圓錐曲線的方程式

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

就可以寫成:

$$[P,P]_M=0$$

這裡的 M 就是一個典型的「對稱矩陣 」。從現在開始, 我們將這個矩陣稱為圓錐曲線的「係數矩陣 」。

因此, 如果 M 是「對稱」的, 那麼我們的新符號就擁有了「交換律」:

(1) $[P,Q]_M=[Q,P]_M$

以上所說的運算性質, 會在下面的討論中一直出現, 但我們將這些性質的證明放到本文最後的附錄中, 因為雖然這些證明很重要, 但並不是我們要討論的重點, 所以介紹完新的符號後, 我們趕快回到原來的問題上吧!

> 我們原來的問題是: 如果直線通過 $A=(x_1,y_1)$、$B=(x_2,y_2)$ 兩點, 那麼它與圓錐曲線: $ax^2+bxy_cy^2+dx+ey+f=0$ 到底會不會相交? 在什麼條件下, 它才會變成切線?

豁然開朗的切線準則

我們前面有提到, 如果點 (x,y) 在圓錐曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 上面, 那麼這個點座標代入方程式當然會等於零, 如果我們用「表格式乘積加總法」來表示的話, 那會得到:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x & a & b/2 & d/2 \\ y & b/2 & c & e/2 \\ 1 & d/2 & e/2 & f \end{array} = 0$$

所以, 如果 A 的座標爲 (x, y), 那麼我們希望用 $\overline{A}$ 來代表 $(x, y, 1)$, 這樣的話, 我們就可以用更簡短的方式來表示一個點是否在圓錐曲線上了, 也就是:

$$A(x, y)\ \text{在}\ \ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\ \ \text{上}$$

可以寫成:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x & a & b/2 & d/2 \\ y & b/2 & c & e/2 \\ 1 & d/2 & e/2 & f \end{array} = [\overline{A}, \overline{A}]_M = 0, \quad \text{其中 } M = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

---

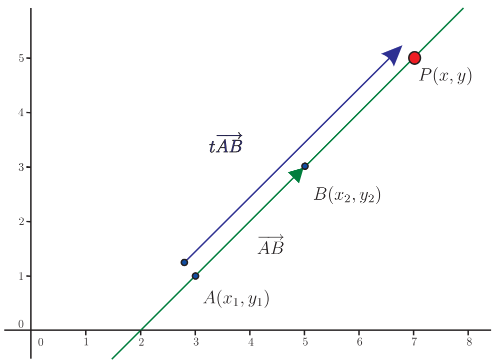
(1) 我們就不妨把 $\overline{A}(x, y, 1)$ 稱爲是 $A(x, y)$ 的「擴充座標」吧! (註: 比較正式的說法是「齊次座標」)

所以假設我們說 B 點的座標爲 $(4, 5)$, 那麼 $\overline{B}$ 就表示是 $(4, 5, 1)$, 其餘請以此類推。好! 我們已經做完所有的準備工作了, 現在讓我們正式開始繼續切線的推理工作吧!

. . . .

通過 $A = (x_1, y_1)$、$B = (x_2, y_2)$ 兩點的直線參數式爲:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t = (1 - t)x_1 + tx_2 \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t = (1 - t)y_1 + ty_2 \end{cases}$$



我們也可以寫成這樣:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1 - t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

如果我們把 (x, y) 稱爲 P, 那麼會有:

$$P = (1 - t)A + tB$$

事實上, 對於「擴充座標」$\overline{P}(x, y, 1)$ 來說, 下面的式子也是對的:

$$\overline{P} = (1 - t)\overline{A} + t\overline{B}$$

也就是:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = (1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是對的 (請讀者自行檢驗) 。

現在, 如果我們要檢查 AB 直線上的動點 P 是不是在圓錐曲線上, 我們只要檢查:

$$[\overline{P},\overline{P}]_M = 0 \ \text{ 對不對就好。}$$

但因為:

$$\overline{P} = (1-t)\overline{A} + t\overline{B}$$

所以, 我們要檢查:

$$[(1-t)\overline{A} + t\overline{B},\ (1-t)\overline{A} + t\overline{B}]_M = 0 \ \text{ 有沒有解?}$$

接著我們整理 (利用新符號的運算性質) :

$$\begin{aligned}
&[(1-t)\overline{A} + t\overline{B},\ (1-t)\overline{A} + t\overline{B}]_M \\
&= (1-t)^2[\overline{A},\overline{A}]_M + 2t(1-t)[\overline{A},\overline{B}]_M + t^2[\overline{B},\overline{B}]_M \\
&= \Big([\overline{A},\overline{A}]_M - 2[\overline{A},\overline{B}]_M + [\overline{B},\overline{B}]_M\Big)\cdot t^2 + \Big(-2[\overline{A},\overline{A}]_M + 2[\overline{A},\overline{B}]_M\Big)\cdot t + \Big([\overline{A},\overline{A}]_M\Big)
\end{aligned}$$

之前, 我們對這個 t 的二次式有沒有解束手無策, 現在有了新的符號幫忙下, 如虎添翼, 我們不僅用新符號重新算出這個二次式, 這一次我們更要計算出它的判別式, 請繼續看下面判別式的計算:

$$\begin{aligned}
&\Big(-2[\overline{A},\overline{A}]_M + 2[\overline{A},\overline{B}]_M\Big)^2 - 4\Big([\overline{A},\overline{A}]_M - 2[\overline{A},\overline{B}]_M + [\overline{B},\overline{B}]_M\Big)\Big([\overline{A},\overline{A}]_M\Big) \\
&\quad = 4\Big([\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{B}}]_M^2 - [\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{B}},\overline{\mathbf{B}}]_M\Big)
\end{aligned}$$

從上式, 我們得到一個非常重要的結果, 也是本文最主要的結果, 當:

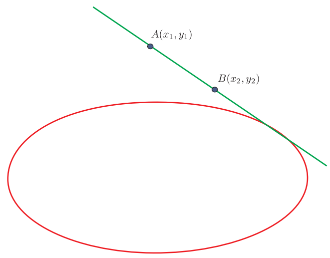
$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{B}}]_M^2 - [\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{B}},\overline{\mathbf{B}}]_M = 0 \ \text{ 時}$$

判別式為零, 此時意味著: 直線AB 與圓錐曲線的交點只有一個, 這個交點就是切點, 此直線就是切線。因為這個「切線準則」太重要了, 所以我們重新再敘述一遍:

切線準則

若通過 $A(x_1, y_1)$ 與 $B(x_2, y_2)$ 的直線爲圓錐曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 的切線, 則「擴充座標」$\overline{A}(x_1, y_1, 1)$、$\overline{B}(x_2, y_2, 1)$ 會擁有以下的切線準則:

(1) $[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}]_M^2 - [\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{B}}]_M = 0.$



之前我們完全無法處理的判別式, 現在竟然化爲如此簡短的數學式, 可見新符號的威力眞是驚人!

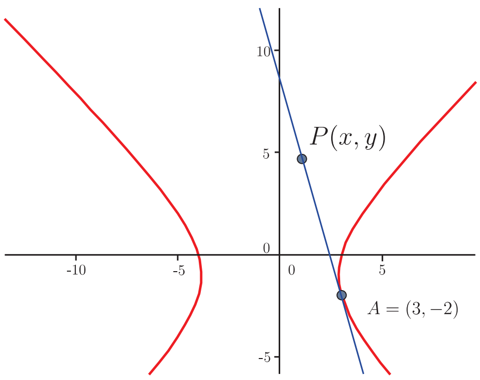
切線準則的應用

現在讓我們舉幾個例子來看看如何使用這個超強的「切線準則」。

例題 2: $A(3, -2)$ 在雙曲線 $x^2 - y^2 + x - 2y - 12 = 0$ 上。請問經過 A 點的切線方程式是什麼?

解答: 假設 $P(x, y)$爲切線上的一點, 那麼通過 A 與 P 的直線, 事實上就是切線本身, 既然如此, 那麼 $\overline{\mathbf{A}}$ 與 $\overline{\mathbf{P}}$ 就會符合「切線準則」:

$$[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{P}}]_M^2 - [\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{P}}]_M = 0$$



但因爲 A 本身在雙曲線上, 所以: $[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]_M = 0$
因此, 我們可以得到: $[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{P}}]_M = 0$
也就是:

	x	y	1
3	1	0	1/2
-2	0	-1	-1
1	1/2	-1	-12

$= 0$

經整理可得: $\frac{7}{2}x + y - \frac{17}{2} = 0$
或者你也可以寫成 $7x + 2y = 17$, 這就是經過 A 點的切線方程式。

. . . .

經過上面這個例題的探討, 我們發現一個漂亮的現象, 那就是:

過切點的切線方程式

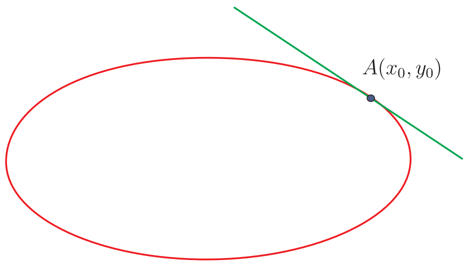
若 $A(x_0, y_0)$ 在圓錐曲線 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 上,

則通過 A 點的切線方程式爲:

$[\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{X}}]_M = 0$, 其中 $\overline{\mathbf{X}} = (x, y, 1)$

也就是切線方程式爲:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & a & b/2 & d/2 \\ y_0 & b/2 & c & e/2 \\ 1 & d/2 & e/2 & f \end{array} = 0$$



現在, 我們將這個公式應用到所有圓錐曲線的標準式上, 你會發現: 所有我們熟知的標準式切線公式 (如果你曾經記憶過的話) , 會一一出現。請看:

下表中, 我們假設 (x_0, y_0) 爲圓錐曲線上的一點

類型	標準式	計算切線	所得切線方程式
橢圓	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} = 0$	$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{x_0}{b^2}y=1$
抛物線(上下型)	$x^2=4cy$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & 1 & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & 0 & -2c \\ 1 & 0 & -2c & 0 \end{array} = 0$	$x_0x=2c(y+y_0)$
抛物線(左右型)	$y^2=4cx$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & 0 & 0 & -2c \\ y_0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2c & 0 & 0 \end{array} = 0$	$y_0y=2c(x+x_0)$

類型	標準式	計算切線	所得切線方程式
雙曲線(左右型)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} = 0$	$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{x_0}{b^2}y=1$
雙曲線(上下型)	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{array}{c\|ccc} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} = 0$	$-\frac{x_0}{a^2}x+\frac{x_0}{b^2}y=1$

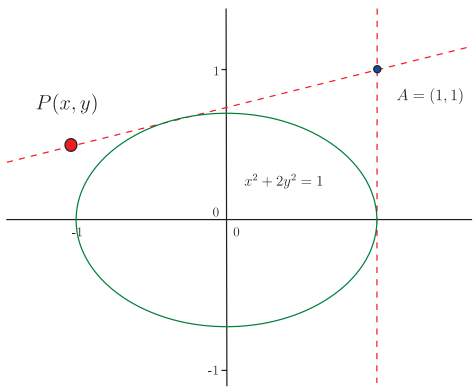
雖然上面我們列出了所有的標準式的切線公式, 但我們這樣做只是爲了要向你說明: 我們的「切線準則」是通用的, 你可以用於任一類型的圓錐曲線, 而不是要你去背誦上面這些看起來都不太一樣的切線公式。

....

上面我們一直把重心擺在解決如何計算圓錐曲線上一點的切線, 但是如果要計算通過圓錐曲線外一點的切線時, 那麼又該如何呢? 請看下面的例子:

例題 3: 請計算通過 $A(1,1)$, 並與橢圓 $x^2+2y^2=1$ 相切的切線方程式。
注意: A 點在橢圓外! 所以會有兩條切線。

解答: 假設 $\mathbf{P}(x,y)$ 爲切線上的一點, 那麼根據「切線準則」, 我們可以得到:
$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{P}}]_M^2-[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{P}},\overline{\mathbf{P}}]_M=0$. 其中:



$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{P}}]_M=\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}=x+2y-1$$

$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M=1^2+2\times1^2-1=2$ $\boxed{\text{註}}$: 就是將 $A(1,1)$ 直接代入 x^2+2y^2-1

$[\overline{\mathbf{P}},\overline{\mathbf{P}}]_M=x^2+2y^2-1$ $\boxed{\text{註}}$: 就是將 $\mathbf{P}(x,y)$ 直接代入 x^2+2y^2-1

因此,

$$(x+2y-1)^2-2(x^2+2y^2-1)=0$$

整理可得:

$$x^2-4xy+2x+4y-3=0$$

最後我們作因式分解(我們知道答案是兩條直線, 所以應該可以分解成兩條直線方程式) :

$$\begin{aligned}&(-4x+4)y+(x^2+2x-3)=0\\&-4(x-1)y+(x-1)(x+2)=0\\&(x-1)(-4y+x-2)=0\end{aligned}$$

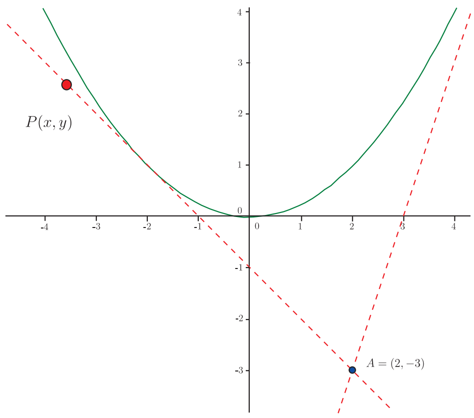
因此:

$$x-1=0 \ \text{或} \ x-4y+3=0$$

最後這兩個方程式都是直線方程式, 而且也是 $\mathbf{P}(x,y)$ 必須符合的條件, 所以這兩條直線就是切線!

例題 4: 請計算通過 $A(2,-3)$, 並與拋物線 $x^2=4y$ 相切的切線方程式。注意: A 點在拋物線外! 所以會有兩條切線。

解答: 假設 $\mathbf{P}(x,y)$ 爲切線上的一點, 那麼根據「切線準則」,
我們可以得到: $[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{P}}]_M^2-[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{P}},\overline{\mathbf{P}}]_M=0$
其中:



$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{P}}]_M=\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1\\ \hline 2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -2 & 0\end{array}=2x-2y+6$$

$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M=2^2-4(-3)=16$$

$$[\overline{\mathbf{P}},\overline{\mathbf{P}}]_M=x^2-4y$$

因此,

$$(2x-2y+6)^2-16(x^2-4y)=0$$

整理可得:

$$3x^2+2xy-y^2-6x-10y-9=0$$

最後我們作因式分解:

$$\begin{aligned}&3x^2+(2y-6)x-(y^2+10y+9)=0\\&3x^2+(2y-6)x-(y-1)(y+9)=0\\&[x+(y+1)][3x-(y+9)]=0\end{aligned}$$

因此:

$$x+y+1=0 \ \text{ 或 } \ 3x-y-9=0$$

最後這兩個直線方程式, 就是切線!

. . . .

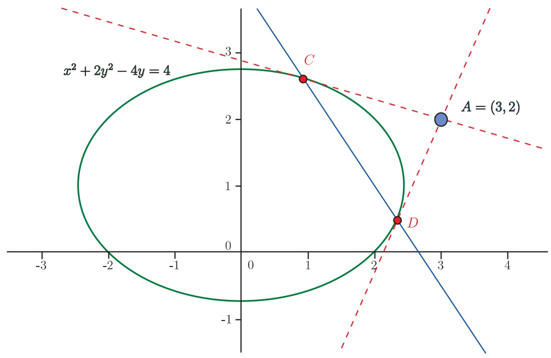
一般說來, 如果一個點在圓錐曲線之外, 那麼它會擁有兩條切線, 但還有另外一條線跟這個點也有密切的關係, 這條線叫做「極線」, 請看以下的探討:

極線的探討

例題 5: 已知 $A(3,2)$ 在橢圓 $x^2+2y^2-4y=4$ 的外面, 且通過 A 點的切線 (有兩條) 與橢圓分別交於 C、D 兩點, 請計算出 CD 直線的方程式。

解答: 因爲 AC 直線與 AD 直線都是切線, 所以由「切線準則」知:

$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{C}}]_M^2-[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{C}},\overline{\mathbf{C}}]_M=0$$
$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{D}}]_M^2-[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{A}}]_M[\overline{\mathbf{D}},\overline{\mathbf{D}}]_M=0$$



但因爲 C、D 都在橢圓上, 所以:

$$[\overline{\mathbf{C}},\overline{\mathbf{C}}]_M=0$$
$$[\overline{\mathbf{D}},\overline{\mathbf{D}}]_M=0$$

因此我們可以知道:

$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{C}}]_M=0$$
$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{D}}]_M=0$$

雖然目前我們還不知道 C、D 的點座標, 但由這兩個方程式, 我們知道 C、D 同時符合下面這個方程式:

$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{X}}]_M=0, \quad \text{其中} \ \ \overline{\mathbf{X}}=(x,y,1)$$

然而這個方程式本身就是一個直線方程式, 請看:

$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{X}}]_M=\begin{array}{c|ccc} & x & y & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}=3x+2y-8$$

所以, 既然 C、D 同時符合這個方程式, 那麼 CD 直線方程式當然就是: $3x+2y=8$

. . . .

經由上面這個例題的探討, 我們得到一條特殊的直線, 這條直線我們稱爲「極線」, 這是一條通過兩切點的直線。我們將這個重要的結果整理如下:

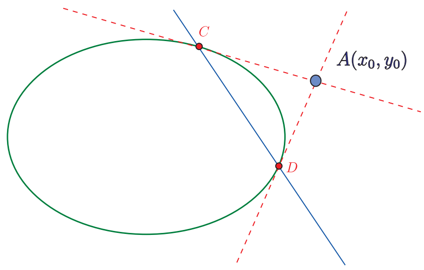
極線公式

若 $A(x_0,y_0)$ 在圓錐曲線 $as^2+bxy+cy+dx+ey+f=0$ 外面, 通過 A 點的兩條切線交圓錐曲線於 C、D 兩點, 則我們稱 CD 直線爲 A 點的「極線」, 且其方程式爲:

$$[\overline{\mathbf{A}},\overline{\mathbf{X}}]_M=0,\quad \text{其中}\ \ \overline{\mathbf{X}}=(x,y,1)$$

也就是極線方程式爲:

$$\begin{array}{c|ccc|} & x & y & 1 \\ \hline x_0 & a & b/2 & d/2 \\ y_0 & b/2 & c & e/2 \\ 1 & d/2 & e/2 & f \\ \hline \end{array} = 0$$



此時, 我們也稱 A 點爲 CD 直線的「極點」。

如果你還記得前面的「過切點的切線方程式」公式的話, 你會發現: 這兩個公式不是一模一樣嗎? 是的, 的確沒錯! 是一模一樣。當 A 點在圓錐曲線外時, 這個公式會產生「極線」, 但當 A 點到達圓錐曲線上時, 它就會變成「切線」!

其實, 透過上面的極線公式, 我們可以得到一種特殊的對應關係, 也就是一個「極點」對應到一條「極線」, 更特殊的是: 一個「切點」對應到一條「切線」, 這種對應關係非常有意思, 所以我們打算繼續往下探討, 但是因爲以下的探討需要用到「矩陣 」與「齊次座標」的觀念, 因此如果你沒有學過這些觀念, 那麼也許你只能先跳過下面這一段!

以下的討論, 僅提供給學過「矩陣 」與「齊次座標」的讀者!

極點與極線、切點與切線的探索

在更深入討論之前, 我們先利用「矩陣 」與「齊次座標」的語言, 再將前面的結果重新敍述一遍:

假設:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \text{爲座標平面上定點} A \text{ 的齊次座標}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \quad \text{爲圓錐曲線的係數矩陣}$$

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{爲座標平面上動點} X \text{ 的齊次座標}$$

由前面的討論, 我們有下面的結果:

---

(1) 若 A 在圓錐曲線上, 則 $\mathbf{A^TMA}=0$。

(2) 若 A 爲極點, 則 $\mathbf{A^TMX}=0$ 爲極線方程式, 我們也可以說 $\mathbf{A^TM}$ 爲極線的齊次座標。

(3) 若 A 爲切點, 則 $\mathbf{A^TMX}=0$ 爲切線方程式, 我們也可以說 $\mathbf{A^TM}$ 爲切線的齊次座標。

若我們假設 $\mathbf{u}=\mathbf{A^TM}$ 是一條極線 (或切線) 的齊次座標, 則我們可以推論:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}=\mathbf{A^TM} &\Rightarrow \mathbf{uM}^{-1}=\mathbf{A^T} \\ &\Rightarrow \mathbf{A}=(\mathbf{uM}^{-1})^{\mathbf{T}}\mathbf{u^T}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u^T} \end{aligned}$$

所以我們有以下結果:

---

(1) 若 $\mathbf{u}$ 爲極線 (切線)齊次座標, 則 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u^T}$ 爲極點 (切點)齊次座標。

如果 $\mathbf{u}$ 是切線齊次座標的話, 那麼 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u^T}$ 就是切點, 也就是說 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u^T}$ 在圓錐曲線上, 因此我們可以推得: $(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u^T})^{\mathbf{T}}\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u^T})=0$
也就是: $\mathbf{uM}^{-1}\mathbf{u^T}=0$
所以我們又有了一個很特殊的結果:

切線齊次座標方程式

如果 $\mathbf{u}$ 是切線齊次座標的話, 那麼 $\mathbf{u}$ 符合方程式: $\mathbf{uM}^{-1}\mathbf{u^T}=0$

這個「切線齊次座標方程式」有很漂亮的應用, 但在應用它之前, 我想先說說 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{M}^{-1}$。

$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$ 可以說是圓錐曲線的「齊次座標」, 怎麼說呢? 且讓我來舉的例子:

比方說, 如果我們把橢圓方程式 $x^2+2y^2-4y=4$ 乘以 3 倍, 會得到 $3x^2+6y^2-12y=12$, 但它還是同一個橢圓方程式啊! 也就是說: 兩個「係數矩陣 」

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$, 它們的作用其實是一模一樣的!

所以, 如果兩個「係數矩陣 」只差一個 (非零的) 倍數, 那麼它就會代表同一個圓錐曲線, 這也就是爲什麼我們說 $\mathbf{M}$ 算是圓錐曲線的「齊次座標」了!

因此, 雖然「切線齊次座標方程式」寫成 $\mathbf{uM}^{-1}\mathbf{u}^{\mathbf{T}}=0$, 但因爲 $\mathbf{M}^{-1}$ 與 $adj(\mathbf{M})$ 只差一個倍數, 所以我們在眞正計算的時候, 其實直接利用 $adj(\mathbf{M})$ 就可以了。

$\boxed{\text{註}}$: $adj(\mathbf{M})$ 是 $\mathbf{M}$ 的「古典伴隨矩陣 」(classical adjoint)。也就是:

$$\text{若}\quad M=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},\quad \text{則}\quad adj(\mathbf{M})=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

下面我們就來看看如何應用這個「切線齊次座標方程式」!

切線齊次座標方程式的應用

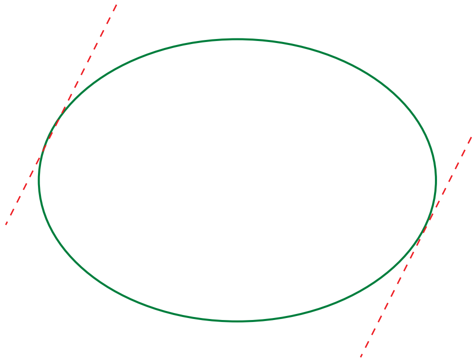
例題 6: 請計算出橢圓 $x^2+2y^2-4y=4$ 上斜率爲 2 的切線 (有兩條) 。

解答: 因爲切線斜率爲 2, 我們可以將切線設爲: $2x-y+k=0$, 也就是我們可以將切線的「齊次座標」(也就是它的係數) 設爲:

$$\mathbf{u}=[2\quad -1\quad k]$$

再來, 經由橢圓的「係數矩陣 」:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$



我們可以計算出:

$$\mathbf{M}^{-1} \equiv adj(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

因爲 $\mathbf{u}$ 爲切線的「齊次座標」, 所以符合: $\mathbf{u}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathbf{T}} = 0$, 因此我們可以得到:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & k \\ \hline 2 & -12 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 2 \\ k & 0 & 2 & 2 \end{array} = 0$$

整理得:

$$k^2 - 2k - 26 = 0$$
$$k = 1 \pm 3\sqrt{3}$$

因此我們所求的切線爲:

$$2x - y + 1 \pm 3\sqrt{3} = 0$$

. . . .

從上面這個例子可以看到, 利用 $\mathbf{M}^{-1}$ (或者 $adj(\mathbf{M})$), 我們可以計算出已知斜率的切線方程式。所以讓我們再看另一個例子來說明如何計算圓錐曲線標準式的切線。

例題 7: 已知橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的切線斜率爲 m, 請計算其方程式。

解答: 橢圓標準式的「係數矩陣 」爲:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

所以:

$$\mathbf{M}^{-1} \equiv adj(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} -1/b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a^2b^2 \end{bmatrix}$$

假設切線方程式爲: $mx - y + k = 0$, 也就是假設 $\mathbf{u} = [m \quad -1 \quad k]$, 因此根據:

$$\mathbf{u}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathbf{T}} = 0$$

我們有:

$$-\frac{m^2}{b^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{a^2b^2} = 0$$

所以推得:

$$k^2 = a^2m^2 + b^2$$

$$k = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

因此, 我們可以推得已知斜率的橢圓切線公式: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

....

經由上面這個例子的啓發, 我們可以看得出來, 其實每個「標準式」的切線都可以利用相同的方法計算出來。下面我們就列出所有圓錐曲線 (橢圓、雙曲線、拋物線) 標準式的切線公式 (如果斜率是已知的話) , 但詳細的計算過程, 請讀者自行驗證。

已知斜率的切線公式

類型	標準式	$\mathbf{M}$	計算 $\mathbf{u}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}^{\mathbf{T}} = 0$	所得切線方程式
橢圓或雙曲線	$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{B} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} & m & -1 & k \\ \hline m & \frac{-1}{B} & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & \frac{-1}{A} & 0 \\ \hline k & 0 & 0 & \frac{1}{AB} \\ \hline \end{array} = 0$	$y = mx \pm \sqrt{Am^2 + B}$
拋物線 (上下型)	$x^2 = 4cy$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2c \\ \hline 0 & -2c & 0 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} & m & -1 & k \\ \hline m & -4c^2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 2c \\ \hline k & 0 & 2c & 0 \\ \hline \end{array} = 0$	$y = mx - cm^2$
拋物線 (左右型)	$y^2 = 4cx$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & -2c \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline -2c & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} & m & -1 & k \\ \hline m & 0 & 0 & 2c \\ \hline -1 & 0 & -4c^2 & 0 \\ \hline k & 2c & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = 0$	$y = mx + \frac{c}{m}$

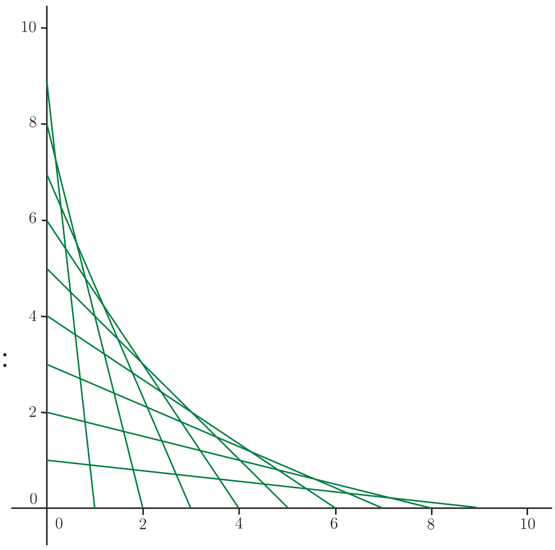
當然, 跟前面一樣, 我們列出這個公式表, 並不是要讀者去背誦它, 我們的目的還是在展示最重要的一個觀念:「切線齊次座標方程式」是通用的, 而且它不是只能用在標準式而已喔!

下面我們再展示一個更神奇的例子給你看。如果我們不知道圓錐曲線本身的方程式, 但知道它的某些切線方程式, 我們甚至可以反推出這個圓錐曲線是誰, 請看!

例題 8: 如右下圖, 我們連接 $(1,0)$, $(0,9)$、$(2,0)$, $(0,8)$、$\cdots$, $(9,0)$, $(0,1)$ 等直線。假設這些直線都是某個圓錐曲線的切線, 請問這個圓錐曲線的方程式是什麼?

解答: 從右圖這些連接線的連接法, 我們可以知道它們的截距式為:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{9}=1$$
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1$$
$$\vdots$$
$$\frac{x}{9}+\frac{y}{1}=1$$



它們可以統一寫成:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,\quad \text{其中}\quad m+n=10$$

換句話說, 我們可以假設這些線的「齊次座標」為:

$$\mathbf{u}=[u\quad v\quad 1],\quad \text{其中}\quad u=-\frac{1}{m},\ v=-\frac{1}{n}$$

這樣一來, 因為 $m+n=10$, 所以可以推得:

$$-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=10$$
$$10uv+u+v=0$$

而且如果這些線都是某個圓錐曲線的切線, 那麼它們會符合切線「齊次座標」的方程式:

$$\mathbf{uM^{-1}u^T}=0$$

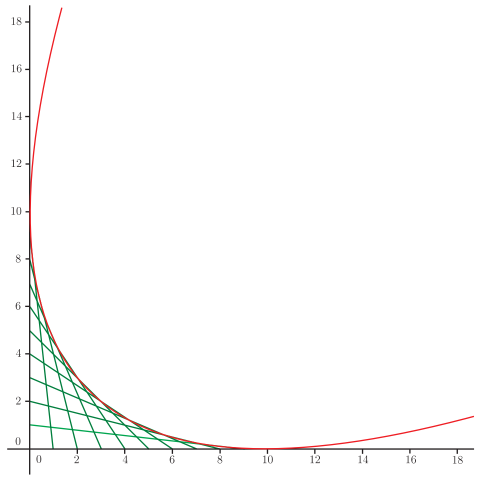
但我們知道: $10uv+u+v=0$, 所以可以推得:

$$\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}0&5&1/2\\5&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{bmatrix}$$

最後我們可以得到:

$$\mathbf{M} \equiv adj(\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 5/2 \\ 1/4 & -1/4 & 5/2 \\ 5/2 & 5/2 & -25 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & -10 \\ -1 & 1 & -10 \\ -10 & -10 & 100 \end{bmatrix}$$



也就是原來的圓錐曲線方程式為:

$x^2-2xy+y^2-20x-20y+100=0$

進一步的分析讓我們知道它是一個「拋物線」, 如上圖。

. . . .

附錄

(新符號運算性質的證明)

假設 $P=(x_1,y_1,z_1)$、$Q=(x_2,y_2,z_2)$、$R=(x_3,y_3,z_3)$, t 為實數, 則有

(1) 加法分配律:

$[P+Q,R]_M=[P,R]_M+[Q,R]_M$ 或 $[P,Q+R]_M=[P,Q]_M+[P,R]_M$

(2) 純量積:

$[tP,Q]_M=t[P,Q]_M=[P,tQ]_M$

證明 我們先證明加法分配律。假設:

$$M=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

則:

$$
\begin{aligned}
[P+Q,R]_M &= \begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_1+x_2 & a & b & c \\ y_1+y_2 & d & e & f \\ z_1+z_2 & g & h & i \end{array} \\
&= a(x_1+x_2)x_3 + b(x_1+x_2)y_3 + \cdots + i(z_1+z_2)z_3 \\
&= ax_1x_3 + bx_1y_3 + \cdots + iz_1z_3 + ax_2x_3 + bx_2y_3 + \cdots + iz_2z_3 \\
&= \begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_1 & a & b & c \\ y_1 & d & e & f \\ z_1 & g & h & i \end{array} + \begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_2 & a & b & c \\ y_2 & d & e & f \\ z_2 & g & h & i \end{array} = [P,R]_M + [Q,R]_M
\end{aligned}
$$

另一邊的加法分配律請讀者自行驗證。

....

接下來, 我們再證明「純量積」。

$$
\begin{aligned}
[tP,Q]_M &= \begin{array}{c|ccc} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \hline tx_1 & a & b & c \\ ty_1 & d & e & f \\ tz_1 & g & h & i \end{array} \\
&= atx_1x_2 + btx_1y_2 + \cdots + itz_1z_2 \\
&= t(ax_1x_2 + bx_1y_2 + \cdots + iz_1z_2) \\
&= t \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \hline x_1 & a & b & c \\ y_1 & d & e & f \\ z_1 & g & h & i \end{array} \right) = t[P,Q]_M
\end{aligned}
$$

另一邊的純量積也請讀者自行驗證。

....

參考文獻

1. Brannan, D. A., Esplen, M. F. and Gray, J. J., Geometry, Cambridge, p.166-173.

— 本文作者任教台北市立陽明高中數學科 —