數學傳播 33卷1期, pp. 89-90

Carulan不等式的一種加強

安振平

1906年, Carulan 提出並證明了如下不等式 (文 [1]):
設 a, b, c 是三角形的三邊長, 求證

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0. \tag{1}$$

筆者發現了不等式 (1) 的一個加強。

定理: 設 a, b, c 和 r 分別是三角形的三邊長與內切圓半徑, 求證

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 8r^2(a-b)^2. \tag{2}$$

證明: 作代換 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, $x,y,z\in R^+$,
由三角形的面積公式

$$\triangle=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

得
$$r^2=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)},$$

於是, 有
$$r^2=\frac{xyz}{x+y+z}.$$

從而, 不等式 (2) 等價於

$$xy^3+yz^3+zx^3-xyz(x+y+z)\geq\frac{4xyz(x-y)^2}{x+y+z},$$

也就是, 對於 $x,y,z\in R^+$ 則有

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z+\frac{4(x-y)^2}{x+y+z}. \tag{3}$$

事實上

由於 $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$, 所以有

$$\frac{x^2}{y}=2x-y+\frac{(x-y)^2}{y}.$$

同理
$$\frac{y^2}{z}=2y-z+\frac{(y-z)^2}{z},$$
$$\frac{z^2}{x}=2z-x+\frac{(z-x)^2}{z}.$$

於是, 將上面的3個等式相加, 便得

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=x+y+z+\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{z}+\frac{(z-x)^2}{x}. \qquad (*)$$

應用不等式 (文 [2], [3]。化爲整式, 容易證明) $\dfrac{x_1^2}{y_1}+\dfrac{x_2^2}{y^2}\geq\dfrac{(x_1+x_2)^2}{y_1+y_2}$ $(y_1,y_2\in R^+)$, 得

$$\begin{aligned}\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{z}+\frac{(z-x)^2}{x}&\geq\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{[(y-z)+(z-x)]^2}{z+x}\\&=(x-y)^2\Big[\frac{1^2}{y}+\frac{1^2}{z+x}\Big]\\&\geq\frac{4(x-y)^2}{x+y+z}.\end{aligned}$$

於是, 結合恒等式 $(*)$, 就得出了不等式 (3)。得證。

其實, 由於問題的對稱性, 改進不等式 (2) 的下界, 便得 Carulan 不等式又一加強。

推論: 設 a, b, c 和 r 分別是三角形的三邊長與內切圓半徑, 求證

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 8r^2\cdot\max\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}. \qquad (4)$$

參考文獻

1. (荷蘭) O. Bottema 等著, 幾何不等式 [M], 北京大學出版社, 1991, 9。
2. 安振平, 對一個不等式推廣的錯誤辨析及另推廣 [J], 數學通報, 1994, 6。
3. 安振平, 高二數學巧思妙解 [M], 陝西師範大學出版社, 2002, 5。

—本文作者現任教陝西省咸陽市永壽縣中學—