數學傳播 33卷1期, pp. 85-88

Cordon不等式的類比

蔣明斌

本文約定: a, b, c: $\triangle ABC$ 的三邊長; p: 半周長; R: 外接圓半徑; r: 內切圓半徑; S: 面積; h_a, h_b, h_c: 高; t_a, t_b, t_c: 角平分線長; r_a, r_b, r_c: 旁切圓半徑; m_a, m_b, m_c: 中線長。

1967年, V. O. Cordon 曾建立涉及 $\triangle ABC$ 的高與邊長之間的不等式 ([1]):

$$\frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{b^2}{h_c^2+h_a^2}+\frac{c^2}{h_a^2+h_b^2}\geq 2 \tag{1}$$

最近貴刊文 [2] 給出了 (1) 的加強並給出了 (1) 左邊的上界, 得到如下不等式:

$$\frac{9R^2}{4R^2+2r^2}\leq\frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{b^2}{h_c^2+h_a^2}+\frac{c^2}{h_a^2+h_b^2}\leq\frac{R}{r} \tag{2}$$

筆者在閱讀貴刊文 [2]、[3]、[4] 的時候, 很自然地想到 : 把 (1) 中的高分別換成角平分線長, 旁切圓半徑, 中線長 (1) 是否成立? 通過研究發現前兩者成立, 後一個反向成立, 即有

定理: 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$\frac{a^2}{t_b^2+t_c^2}+\frac{b^2}{t_c^2+t_a^2}+\frac{c^2}{t_a^2+t_b^2}\geq 2 \tag{3}$$

$$\frac{a^2}{r_b^2+r_c^2}+\frac{b^2}{r_c^2+r_a^2}+\frac{c^2}{r_a^2+r_b^2}\geq 2 \tag{4}$$

$$\frac{a^2}{m_b^2+m_c^2}+\frac{b^2}{m_c^2+m_a^2}+\frac{c^2}{m_a^2+m_b^2}\leq 2 \tag{5}$$

引理: 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$t_a^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a) \tag{6}$$

$$r_a=\frac{S}{p-a} \tag{7}$$

$$m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2) \tag{8}$$

證明: (6)、(7) 的證明分別見 [3]、[4]。現在來證明 (8) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=c$, $BC=a$ $CA=b$, 設 M 爲 BC 的中點, $\angle AMB=\alpha$, 則 $BM=CM=\dfrac{a}{2}$, $\angle AMD=180^\circ-\alpha$, 由餘弦定理有

$$c^2=AB^2=BM^2+AM^2-2BM\cdot AM\cos\alpha=\Big(\frac{a}{2}\Big)^2+m_a^2-am_a\cos\alpha,$$
$$b^2=AC^2=CM^2+AM^2-2CM\cdot AM\cos(180^\circ-\alpha)=\Big(\frac{a}{2}\Big)^2+m_a^2+a\cdot m_a\cos\alpha,$$

兩式相加得, $b^2+c^2=\dfrac{a^2}{2}+2m_a^2$, 所以 $m_a^2=\dfrac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$。

定理的證明: 由引理中的 (6) 及算幾不等式有 $t_a^2=\dfrac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)\le p(p-a)$, 同理有 $t_b^2\le p(p-b)$, $t_c^2\le p(p-c)$,
則 $t_b^2+t_c^2\le p(p-b)+p(p-c)=p(2p-b-c)=pa$, $\dfrac{a^2}{t_b^2+t_c^2}\ge\dfrac{a^2}{pa}=\dfrac{a}{p}$,
同理 $\dfrac{b^2}{t_c^2+t_a^2}\ge\dfrac{b}{p}$, $\dfrac{c^2}{t_a^2+t_b^2}\ge\dfrac{c}{p}$, 三式相加得, $\dfrac{a^2}{t_b^2+t_c^2}+\dfrac{b^2}{t_c^2+t_a^2}+\dfrac{c^2}{t_a^2+t_b^2}\ge\dfrac{a+b+c}{p}=2$, 即 (3) 成立。

由引理中的 (7) 及海倫公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 有

$$r_a(r_b+r_c)=\frac{S}{p-a}\Big(\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}\Big)=\frac{S^2(2p-b-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=ap$$
$$\Rightarrow a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{p}$$

用 $\sum$ 表示對 a, b, c 的迴圈和, 則

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{r_b^2+r_c^2}+\frac{b^2}{r_c^2+r_a^2}+\frac{c^2}{r_a^2+r_b^2}&=\frac{1}{p^2}\sum\frac{r_a^2(r_b+r_c)^2}{r_b^2+r_c^2}\\
&=\frac{1}{p^2}\sum\frac{[(r_a^2+r_b^2+r_c^2)-(r_b^2+r_c^2)](r_b+r_c)^2}{r_b^2+r_c^2}\\
&=\frac{1}{p^2}\Big[\sum\frac{(r_a^2+r_b^2+r_c^2)(r_b+r_c)^2}{r_b^2+r_c^2}-\sum(r_b+r_c)^2\Big]\\
&=\frac{1}{p^2}\Big[\Big(\sum r_a^2\Big)\sum\frac{(r_b+r_c)^2}{r_b^2+r_c^2}-\sum(r_b+r_c)^2\Big]\\
&=\frac{1}{p^2}\Big[\frac{1}{2}\sum(r_b^2+r_c^2)\sum\frac{(r_b+r_c)^2}{r_b^2+r_c^2}-\sum(r_b+r_c)^2\Big]
\end{aligned}$$

因爲 $\sum(r_b^2+r_c^2)\sum\dfrac{(r_b+r_c)^2}{r_b^2+r_c^2}=\sum\left(\sqrt{r_b^2+r_c^2}\right)^2\sum\left(\dfrac{r_b+r_c}{\sqrt{r_b^2+r_c^2}}\right)^2$ 應用柯西不等式, 有

$$\sum(r_b^2+r_c^2)\sum\frac{(r_b+r_c)^2}{r_b^2+r_c^2}\geq\Big[\sum(r_b+r_c)\Big]^2=\Big(2\sum r_a\Big)^2=4\Big(\sum r_a\Big)^2,$$

於是

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{r_b^2+r_c^2}+\frac{b^2}{r_c^2+r_a^2}+\frac{c^2}{r_a^2+r_b^2}\\&\quad\geq\frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{2}\times4\Big(\sum r_a\Big)^2-\sum(r_b+r_c)^2\right]\\&\quad=\frac{1}{p^2}\left[2\Big(\sum r_a^2+2\sum r_br_c\Big)-\Big(2\sum r_a^2+2\sum r_br_c\Big)\right]=\frac{2}{p^2}\sum r_br_c\end{aligned}$$

而由引理中的 (7) 及海倫公式, 有

$$\sum r_br_c=\sum\frac{S^2}{(p-b)(p-c)}=\frac{S^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}\sum(p-a)=p(3p-a-b-c)=p^2$$

所以, $\dfrac{a^2}{r_b^2+r_c^2}+\dfrac{b^2}{r_c^2+r_a^2}+\dfrac{c^2}{r_a^2+r_b^2}\geq\dfrac{1}{p^2}\times2\sum r_br_c=\dfrac{1}{p^2}\times2p^2=2$, 即 (4) 成立。

由引理中的 (8) 得到

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{m_b^2+m_c^2}+\frac{b^2}{m_c^2+m_a^2}+\frac{c^2}{m_a^2+m_b^2}&=\frac{a^2}{a^2+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}}+\frac{b^2}{b^2+\frac{c^2}{4}+\frac{a^2}{4}}+\frac{c^2}{c^2+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}\\&=4\left(\frac{a^2}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+4c^2}\right)\end{aligned}$$

令 $x=4a^2+b^2+c^2$, $y=a^2+4b^2+c^2$, $z=a^2+b^2+4c^2$, $x,y,z>0$, 則

$$a^2=\frac{1}{18}(5x-y-z),\quad b^2=\frac{1}{18}(-x+5y-z),\quad c^2=\frac{1}{18}(-x-y+5z),$$

於是

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{m_b^2+m_c^2}+\frac{b^2}{m_c^2+m_a^2}+\frac{c^2}{m_a^2+m_b^2}&=\frac{4}{18}\left(\frac{5x-y-z}{x}+\frac{-x+5y-z}{y}+\frac{-x-y+5z}{z}\right)\\&=\frac{2}{9}\left[15-\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\right]\\&\leq\frac{2}{9}\left(15-6\sqrt[6]{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}\right)=2,\end{aligned}$$

即 (5) 成立。

注: 由 $t_a \geq h_a$, $t_b \geq h_b$, $t_c \geq h_c$ 及 (1)、(2)、(3)、(5) 得:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{m_b^2+m_c^2}+\frac{b^2}{m_c^2+m_a^2}+\frac{c^2}{m_a^2+m_b^2} \leq 2 \leq \frac{a^2}{t_b^2+t_c^2}+\frac{b^2}{t_c^2+t_a^2}+\frac{c^2}{t_a^2+t_b^2}\\ \leq \frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}+\frac{b^2}{h_c^2+h_a^2}+\frac{c^2}{h_a^2+h_b^2} \leq \frac{R}{r}.\end{aligned}$$

參考文獻

1. O. Bottema 等著, 單墫譯, 幾何不等式, 北京大學出版社, 1991。
2. 丁遵標, 與三角形高有關的幾何性質,「數學傳播」第29卷第2期。
3. 丁遵標, 關於三角形內角平分線長的幾何性質,「數學傳播」第29卷第3期。
4. 丁遵標, 與旁切圓半徑有關的四個幾何性質,「數學傳播」第29卷第4期。

—本文作者現任教四川省蓬安縣蓬安中學—