數學傳播 33卷1期, pp. 76-84

關於廣義對稱權方和不等式

蘇化明・潘　杰

摘要: 對文獻 [1] 中的廣義對稱權方和不等式進行了深入討論。

關鍵詞: 廣義對稱權方和不等式, 加權冪平均不等式, Radon 不等式, Archbold 不等式。

「數學傳播」季刊第 31 卷第 1 期 (民國 96 年 3 月) "一個不等式的誕生"[1] 一文從實際生活中的一個最優化問題經過不斷推廣, 最後得到如下廣義對稱權方和不等式:

若 $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $(n\geq 2)$, $\rho,\lambda\in\mathbb{R}$,

當 $\dfrac{\lambda}{\rho}\in(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$ 時, 則

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i^{\lambda} \geq \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}}\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}, \tag{1}$$

等號成立 $\Leftrightarrow a_1b_1^{\lambda-\rho}=a_2b_2^{\lambda-\rho}=\cdots=a_nb_n^{\lambda-\rho}$;

當 $0<\dfrac{\lambda}{\rho}<1$ 時, 則

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i^{\lambda} \leq \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}}\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}, \tag{2}$$

等號成立 $\Leftrightarrow a_1b_1^{\lambda-\rho}=a_2b_2^{\lambda-\rho}=\cdots=a_nb_n^{\lambda-\rho}$。

從數學教學的角度來看, "一個不等式的誕生" 應該是一篇具有創見性的好論文, 因爲該文闡述了一個數學問題發現的全過程, 可以啓發大家如何由此及彼、由表及裡、由特殊到一般地進行思考問題, 如何利用已有問題去進一步探索新問題、尋求新結論。但從科學研究的角度來看, 該文所得到的廣義對稱權方和不等式並不是新的結論, 而是著名的加權冪平均不等式的一個推論。本文就此問題展開討論。

首先介紹

定理 A: 設 $a_i>0$, $p_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, r、s 爲實數且 $r<s$, 則

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^r}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^s}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{3}$$

其中等號成立若且唯若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

不等式 (3) 即著名的加權冪平均不等式, 它的證明可見 [2] 、[3] 、[4]。

由定理 A 可得

定理 A$'$: 設 $a_i>0$, $p_i>0$, $q_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, r、s 爲實數且 $r<s$, 則

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^r}{\sum_{i=1}^{n} (p_i^s q_i^{-r})^{\frac{1}{s-r}}}\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^s}{\sum_{i=1}^{n} (p_i q_i^{-r})^{\frac{1}{s-r}}}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{4}$$

其中等號成立若且唯若

$$\frac{a_1}{\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{\frac{1}{s-r}}}=\frac{a_2}{\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{\frac{1}{s-r}}}=\cdots=\frac{a_n}{\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{s-r}}}.$$

證明: 設 $q_i>0$, 在不等式 (3) 中用 $\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{\frac{1}{s-r}} a_i$ 代替 a_i, 用 $p_i^{\frac{s}{s-r}} q_i^{-\frac{r}{s-r}}$ 代替 p_i $(i=1,2,\ldots,n)$, 經整理即可得到不等式 (4)。

不等式 (4) 是由不等式 (3) 變形而得到的, 因而不等式 (3) 和 (4) 是等價的。但由於不等式 (4) 兩邊加權係數的不同, 因而可用其解一類非對稱變數的不等式問題。作爲不等式 (3) 或 (4) 的推論, 我們有

推論 1: 設 $p_i>0$, $q_i>0$, $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$,

當 $k>1$ 或 $k<0$ 時, 有

$$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^k \geq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^k \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^k}{q_i}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]^{1-k}; \tag{5}$$

當 $0<k<1$ 時, 有

$$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^k \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^k \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^k}{q_i}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]^{1-k}, \tag{6}$$

(5)、(6) 兩式中等號成立若且唯若

$$\frac{a_1}{\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}}=\frac{a_2}{\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}=\cdots=\frac{a_n}{\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{k-1}}}.$$

證明: 當 $k>1$ 時, 在 (4) 中取 $s=k$, $r=1$, 整理後即得 (5); 當 $k<0$ 時, 在 (4) 中取 $s=1$, $r=k$, 整理後並互換 p_i, q_i 的位置, 即得 (5)。

類似方法可得 (6)。

若在 (5)、(6) 中分別取 $k=\dfrac{\lambda}{\rho}$, $p_i=1$, 再用 a_i, b_i^{ρ} 分別代替 (5)、(6) 中的 q_i 與 a_i, 即可得到 (1)、(2)。反之, 我們也可以由不等式 (1)、(2) 得到不等式 (5)、(6), 因而不等式 (1)、(2) 和不等式 (5)、(6) 是等價的。同時我們也證明了不等式 (1)、(2) 爲定理 A$'$ 或定理 A 的推論。

若在不等式 (5)、(6) 中分別取 $p_i=1$, $q_i=b_i^{1-k}$ $(b_i>0,\ i=1,2,\ldots,n)$, 可得

推論2: 設 $a_i>0$, $b_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則

當 $k>0$ 或, $k<0$ 時, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^{k-1}}\ge\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^k}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^{k-1}};\tag{7}$$

當 $0<k<1$ 時, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^{k-1}}\le\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^k}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)^{k-1}},\tag{8}$$

(7)、(8) 兩式中等號成立若且唯若

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

不等式 (7) 即著名的 Radon 不等式[5]。在 (7) 中取 $k=m+1$ (m 爲自然數), 即得文 [1] 的推論 1 (權方和不等式)。

設 $p>0$, $q>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 在 (5)、(6) 中分別取 $k=\dfrac{1}{p}$, $p_i=1$, $q_i=A$, $a_i=B_i^p$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 可得

推論3: 設 $A_i>0$, $B_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $p>0$, $q>0$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 則當 $p>1$ 時, 有

$$\sum_{i=1}^{n}A_iB_i\le\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}B_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}; \tag{9}$$

當 $0<p<1$ 時, 有

$$\sum_{i=1}^{n}A_iB_i\ge\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}B_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{10}$$

(9)、(10) 兩式中等號成立若且唯若

$$\frac{A_1^p}{B_1^q}=\frac{A_2^p}{B_2^q}=\cdots=\frac{A_n^p}{B_n^q}.$$

不等式 (9)、(10) 即著名的 Hölder 不等式。

下面我們進一步說明不等式 (5)、(6) 的應用。

推論4: 設 $a_i>0$, $\lambda_i>0$, $p_i>0$, $q_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i=c$, 則當 $r\ge1$ 且 $k>1$ 時有

$$\sum_{i=1}^{n}q_i\Big(a_i^r+\frac{\lambda_i}{a_i^r}\Big)^k\ge\Bigg\{c^r\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i\Big)^{1-r}+\frac{1}{c^r}\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(p_i\lambda_i^{\frac{1}{1+r}}\Big)\Big]^{1+r}\Bigg\}^k\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{p_i^k}{q_i}\Big)^{\frac{1}{k-1}}\Big]^{1-k}, \tag{11}$$

其中等號成立若且唯若 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$, $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 及 $\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{p_2}{q_2}=\cdots=\dfrac{p_n}{q_n}$。

證明: 在不等式 (5) 中用 $a_i^r+\dfrac{\lambda_i}{a_i^r}$ 代替 a_i $(i=1,2,\ldots,n)$, 則有

$$\sum_{i=1}^{n}q_i\Big(a_i^r+\frac{\lambda_i}{a_i}\Big)^k\ge\Big[\sum_{i=1}^{n}p_i\Big(a_i^r+\frac{\lambda_i}{a_i^r}\Big)\Big]^k\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{p_i^k}{q_i}\Big)^{\frac{1}{k-1}}\Big]^{1-k}, \tag{12}$$

在 (5) 式中取 $q_i=p_i$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^r\ge\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\Big)^r\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i\Big)^{1-r}, \tag{13}$$

在 (5) 式中取 $p_i\lambda_i=q_i$, $k=-r$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i\lambda_i}{a_i^r}\ge\Big(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\Big)^{-r}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda_i^{\frac{1}{1+r}}\Big)^{1+r}, \tag{14}$$

由於 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i=c$, 故由 (12), (13), (14) 知不等式 (11) 成立。

特別在 (11) 中取 $p_i=q_i=\lambda_i=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $r=c=1$, 則當 $k>1$, $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n a_i=1$ 時, 有

$$\sum_{i=1}^n\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^k\geq\frac{(n^2+1)^k}{n^{k-1}}. \tag{15}$$

推論 5: 設 $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n a_i=A$, p 爲正常數, q 爲非負常數, 則當 $k>1$ 或 $k<0$ 時,

$$\sum_{i=1}^n(pa_i+q)^k\geq n^{1-k}(pA+nq)^k; \tag{16}$$

當 $0<k<1$ 時,

$$\sum_{i=1}^n(pa_i+q)^k\leq n^{1-k}(pA+nq)^k, \tag{17}$$

(16)、(17) 兩式中等號成立若且唯若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

證明: 在 (5)、(6) 兩式中令 $p_i=q_i=1$ 並用 pa_i+q 代替 a_i $(i=1,2,\ldots,n)$, 即得 (16)、(17)。

推論 6 (Archbold **不等式的推廣**): 設 z_i 爲複數 $(i=1,2,\ldots,n)$, 而 α_i 是滿足 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i^{-1}=1$ 的一組正數, 則當 $k\geq2$ 時, 有

$$n^{2-k}\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^k\leq n^{2-k}\left(\sum_{i=1}^n|z_i|\right)^k\leq\sum_{i=1}^n\alpha_i|z_i|^k; \tag{18}$$

當 $k\leq0$ 時, 有

$$n^{2-k}\left(\sum_{i=1}^n|z_i|\right)^k\leq\sum_{i=1}^n\alpha_i|z_i|^k. \tag{19}$$

證明: 當 $k\geq2$ 時, 在 (5) 中取 $p_i=1$, $q_i=\alpha_i$, $a_i=|z_i|$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則有

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i|z_i|^k\geq\left(\sum_{i=1}^n|z_i|\right)^k\left[\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]^{1-k}. \tag{20}$$

當 $k=2$ 時, 由於 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i^{-1}=1$, 故由 (20) 可得

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i|z_i|^2\geq\left(\sum_{i=1}^n|z_i|\right)^2\geq\left|\sum_{i=1}^n z_i\right|^2, \tag{21}$$

此即 Archbold 不等式 (可見 [5] 或 [6])。

特別當 $n=2$, $\alpha_1=1+c$, $\alpha_2=1+\dfrac{1}{c}\Big(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}=1\Big)$, $z_1=a$, $z_2=b$ 時, 有

$$|a+b|^2\le(1+c)|a|^2+\Big(1+\frac{1}{c}\Big)|b|^2, \tag{22}$$

此即 Bohr 不等式 (可見 [5] 或 [6])。

當 $k>2$ 時, $0<\dfrac{1}{k-1}<1$, 在不等式 (6) 中取 $p_i=q_i=1$, $a_i=\dfrac{1}{\alpha_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 並用 $\dfrac{1}{k-1}$ 取代 k, 則有

$$\sum_{i=1}^n(\alpha_i^{-1})^{\frac{1}{k-1}}\le\sum_{i=1}^n(\alpha_i^{-1})^{\frac{1}{k-1}}n^{1-\frac{1}{k-1}}=n^{\frac{k-2}{k-1}},$$

由於 $1-k<0$, 所以

$$\left[\sum_{i=1}^n(\alpha_i^{-1})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{1-k}\ge n^{2-k}.$$

結合不等式 (20), 故有

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i|z_i|^k\ge n^{2-k}\Big(\sum_{i=1}^n|z_i|\Big)^k\ge n^{2-k}\Big|\sum_{i=1}^n z_i\Big|^k,$$

此即不等式 (18)。

當 $k=0$ 時, 由算術—調和平均不等式知 (19) 式成立。

當 $k<0$ 時, $\dfrac{1}{k-1}<0$, 在 (5) 中取 $p_i=q_i=1$, $a_i=\dfrac{1}{\alpha_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 並用 $\dfrac{1}{k-1}$ 代替 k, 於是有

$$\sum_{i=1}^n(\alpha_i^{-1})^{\frac{1}{k-1}}\ge\Big(\sum_{i=1}^n\alpha_i^{-1}\Big)^{\frac{1}{k-1}}n^{1-\frac{1}{k-1}}=n^{\frac{k-2}{k-1}},$$

又 $1-k>1$, 所以

$$\left[\sum_{i=1}^n(\alpha_i^{-1})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{1-k}\ge n^{2-k}.$$

由於 $k<0$ 時 (5) 式成立, 所以當 $k<0$ 時 (20) 式仍成立, 故由上式及 (20) 可得

$$n^{2-k}\Big(\sum_{i=1}^n|z_i|\Big)^k\le\sum_{i=1}^n\alpha_i|z_i|^k,$$

故不等式 (19) 成立。

正如文 [1] 所述, 不等式 (5)、(6) [或 (1)、(2)] 的應用舉不勝舉, 作爲本文的結束, 我們僅舉兩例予以說明。

例1: 若實數 x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 滿足 $1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le m$, 並且 $k>1$, 這裡 m、k 均爲常數, 試求下式的最小值

$$(x_1-1)^k+\Big(\frac{x_2}{x_1}-1\Big)^k+\Big(\frac{x_3}{x_2}-1\Big)^k+\cdots+\Big(\frac{x_n}{x_{n-1}}-1\Big)^k+\Big(\frac{m}{x_n}-1\Big)^k.$$

(第 42 屆美國 Putnam 大學生數學競賽題 B$-$2 題之推廣)

解: 在不等式 (5) 中用 $n+1$ 替代 n, 並取 $p_i=q_i=1$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$, 再取 $a_1=x_1-1$, $a_2=\dfrac{x_2}{x_1}-1$, $\ldots$, $a_n=\dfrac{x_n}{x_{n-1}}-1$, $a_{n+1}=\dfrac{m}{x_n}-1$, 則有

$$\begin{aligned}&(x_1-1)^k+\Big(\frac{x_2}{x_1}-1\Big)^k+\Big(\frac{x_3}{x_2}-1\Big)^k+\cdots+\Big(\frac{x_n}{x_{n-1}}-1\Big)^k+\Big(\frac{m}{x_n}-1\Big)^k\\&\quad\ge\frac{1}{(n+1)^{k-1}}\Big[x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{m}{x_n}-(n+1)\Big]^k.\end{aligned}$$

利用算術—幾何平均不等式, 得

$$x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{m}{x_n}\ge(n+1)\sqrt[n+1]{m},$$

從而有

$$(x_1-1)^k+\Big(\frac{x_2}{x_1}-1\Big)^k+\Big(\frac{x_3}{x_2}-1\Big)^k+\cdots+\Big(\frac{x_n}{x_{n-1}}-1\Big)^k+\Big(\frac{m}{x_n}-1\Big)^k\ge(n+1)(\sqrt[n+1]{m}-1)^k. \quad (23)$$

由不等式 (5) 及算術—幾何平均不等式等號成立條件知不等式 (23) 取等號成立若且唯若

$$x_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\cdots=\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{m}{x_n},$$

解此方程組得 $x_1=\sqrt[n+1]{m}$, $x_2=\sqrt[n+1]{m^2},\ldots,$ $x_n=\sqrt[n+1]{m^n}$, 故若且唯若 $x_1=\sqrt[n+1]{m}$, $x_2=\sqrt[n+1]{m^2},\ldots,$ $x_n=\sqrt[n+1]{m^n}$ 時,

$$(x_1-1)^k+\Big(\frac{x_2}{x_1}-1\Big)^k+\Big(\frac{x_3}{x_2}-1\Big)^k+\cdots+\Big(\frac{x_n}{x_{n-1}}-1\Big)^k+\Big(\frac{m}{x_n}-1\Big)^k$$

取最小值 $(n+1)(\sqrt[n+1]{m}-1)^k$。

特別當 $k=2$, $m=4$, $n=3$, $x_1=r$, $x_2=s$, $x_3=t$ 時, 可知, 當 $r=\sqrt{2}$, $s=2$, $t=2\sqrt{2}$ 時,

$$(r-1)^2+\Big(\frac{s}{r}-1\Big)^2+\Big(\frac{t}{s}-1\Big)^2+\Big(\frac{4}{t}-1\Big)^2$$

取最小值 $12-8\sqrt{2}$, 此即第 42 屆 (1981 年) 美國 Putnam 大學生數學競賽試題 B−2 之答案。

(註: 這裡的方法不同於 [7])

例 2[8]: 給定非線性規劃

$$\min f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{x_i}$$

受限制於 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=A$, 其中 α_i, β_i, x_i, A 均爲正數且 α_i, β_i $(i=1,2,\ldots,n)$, A 爲常數。試證明目標函數的最優値由下式給出:

$$f(x^*)=\frac{1}{A}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\beta_i)^{\frac{1}{2}}\Big]^2. \tag{24}$$

證明: 在不等式 (5) 中取 $k=-1$, $a_i=x_i$, $p_i=\alpha_i$, $q_i=\beta_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{x_i}\geq\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big)^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\beta_i)^{\frac{1}{2}}\Big]^2, \tag{25}$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\beta_i}{x_i}\geq\dfrac{1}{A}\Big[\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i\beta_i)^{\frac{1}{2}}\Big]^2$。

因此目標函數的最小値由 $f(x^*)=\dfrac{1}{A}\Big[\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i\beta_i)^{\frac{1}{2}}\Big]^2$ 給出。

註: 由 (25) 式可知

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{x_i}\Big)\geq\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha_i\beta_i}\Big)^2, \tag{25$'$}$$

其中等號成立若且唯若

$$\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}x_1=\sqrt{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}x_2=\cdots=\sqrt{\frac{\alpha_n}{\beta_n}}x_n.$$

特別在 $(25')$ 中取 $\alpha_i=\beta_i=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 並略加變形, 則可得算術—調和平均不等式:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geq\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{-1}}. \tag{26}$$

在 $(25')$ 中取 $\alpha_i=\beta_i=x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則可得算術—均方根不等式:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{27}$$

在 (25′) 中取 $x_i = 1$, $\alpha_i = r_i^2$, $\beta_i = s_i^2$ (r_i, s_i 均爲實數, $i = 1, 2, \ldots, n$), 則得 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |r_i s_i|\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} r_i s_i\right)^2, \tag{28}$$

因而不等式 (25′) 也稱爲變形的 Cauchy-Schwarz 不等式。

參考文獻

1. 石長偉, 一個不等式的誕生, 數學傳播季刊, 2007(1)。
2. 姚雲飛, 朱茱, 論加權冪平均函數與諸種不等式的係統化, 數學傳播季刊, 1997(4)。
3. 史濟懷, 平均, 北京: 人民教育出版社, 1964。
4. G.H.哈代等著, 越民義譯, 不等式, 北京: 科學出版社, 1965。
5. 匡繼昌, 常用不等式 (第3版), 濟南: 山東科技出版社, 2004。
6. 徐利治, 王興華, 數學分析的方法及例題選講, 北京: 高等教育出版社, 1983。
7. *The Forty second William Lowell Putnam Mathematical Competition*, The Amer. Math. Monthly, 1982(9)。
8. M. 阿佛裏耳著, 李元熹等譯, 非線性規劃 (上册), 上海: 上海科學技術出版社, 1979。

—本文作者任教安徽省合肥工業大學數學與資訊科學系—