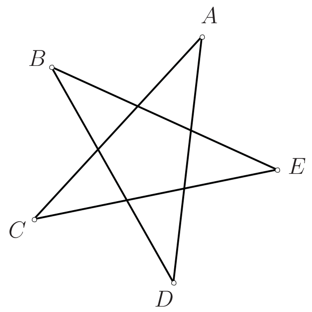
數學傳播 33卷1期, pp. 44-48

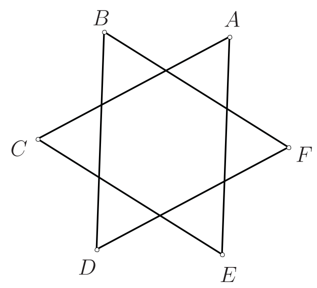
正 n 角星的內角和探討

楊惠后

在國中數學課程的「三角形的基本性質」這一單元中, 一般都會有關於正五角星 、正六角星的內角和求和問題給學生練習, 學生不外乎是利用三角形的內角和定理、外角定理來求解 (見圖一 、圖二), 又因爲求出來的正五角星內角和是 180°、正六角星內角和是 360°, 所以學生不免會好奇其他的正 n 角星的內角和會有怎樣的規則性? 我試著從不同的角度來切入問題, 利用「圓周角的度數是所對的弧度數的一半」這個性質讓整個問題處理起來非常簡潔淸楚, 而且結論也很漂亮。



圖一

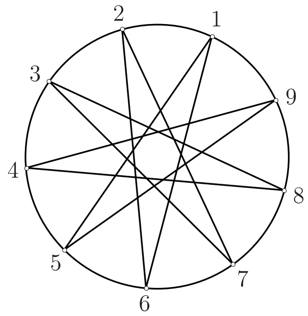


圖二

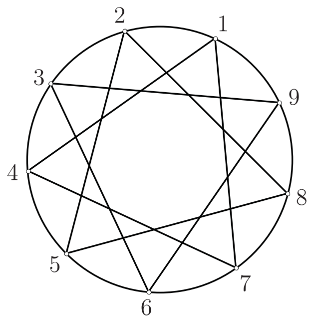
一、正 n 角星的內角和探討

這裡所談論的正 n 角星是可內棱於一圓內, 且每一內角的大小都相同。先以正九角星爲例, 將圓周九等分後, 將等分點編號爲 1∼9, 令兩頂點之間相隔弧的數目爲 d, 且 $1 < d < \left[\dfrac{9}{2}\right]$, 討論: (1) 當 $d = 4$ 時, 按 (1, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6) 的順序將點連接起來, 得一正九角星 (見圖三), 因爲每一個內角所對的弧都是圓周的 $\dfrac{1}{9}$ 等分, 所以九個內角總和是周角 (360°) 的 $\dfrac{1}{2}$, 也就是 180°。(2) 當 $d = 3$ 時, 按 (1, 4, 7) 、(2, 5, 8) 、(3, 6, 9) 的順序將點連接起來, 得一正九角星 (見圖四), 因爲每一個內角所對的弧都是圓周的 $\dfrac{3}{9}$ 等分, 所以九個內角總和是周角的 $\dfrac{3}{2}$, 也就是 540°。(3) 當 $d = 2$ 時, 按 (1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8) 的順序將點連接起來, 得

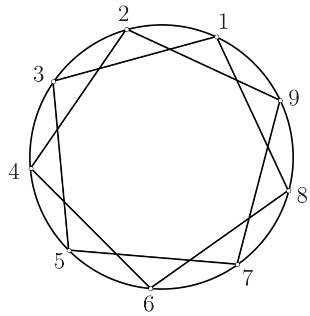
一正九角星 (見圖五), 因爲每一個內角所對的弧都是圓周的 $\dfrac{5}{9}$ 等分, 所以九個內角總和是周角的 $\dfrac{5}{2}$, 也就是 900°。



圖三

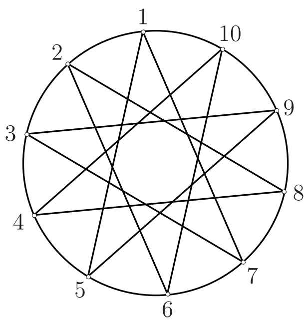


圖四

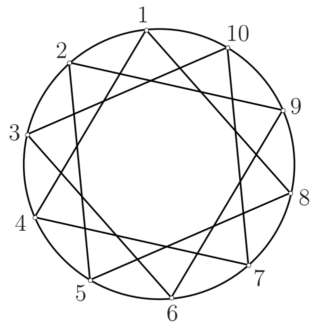


圖五

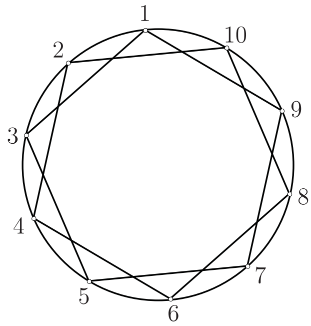
再以正十角星爲例, 將圓周十等分後, 將等分點編號爲 1∼10, 令兩頂點之間相隔弧的數目爲 d, 且 $1 < d < \left[\dfrac{10}{2}\right]$, 討論: (1) 當 $d = 4$ 時, 按 (1, 5, 9, 3, 7) 、(2, 6, 10, 4, 8) 的順序將點連接起來, 得一正十角星 (見圖六), 因爲每一個內角所對的弧都是圓周的 $\dfrac{2}{10}$ 等分, 所以十個內角總和恰爲周角, 也就是 360°。(2) 當 $d = 3$ 時, 按 (1, 4, 7, 10, 3, 6, 9, 2, 5, 8) 的順序將點連接起來, 得一正十角星 (見圖七), 因爲每一個內角所對的弧都是圓周的 $\dfrac{4}{10}$ 等分, 所以十個內角總和是周角的 2 倍, 也就是 720°。(3) 當 $d = 2$ 時, 按 (1, 3, 5, 7, 9) 、(2, 4, 6, 8, 10) 的順序將點連接起來, 得一正十角星 (見圖八), 因爲每一個內角所對的弧都是圓周的 $\dfrac{6}{10}$ 等分, 所以十個內角總和是周角的 3 倍, 也就是 1080°。



圖六



圖七



圖八

利用這樣的想法, 我們可推知: 因爲兩頂點之間相隔弧的數目爲 d, 所以正 n 角星的每一個內角度數爲 $360° \times \dfrac{n-2d}{n} \times \dfrac{1}{2}$, 所以可歸納整理出正 n 角星的內角和公式爲 $180° \times (n-2d)$, 其中 $1 < d < \left[\dfrac{n}{2}\right]$; 可參考下面的附表 (單位: 度)。

d \ n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	180	360	540	720	900	1080	1260	1440	1620	1800
3			180	360	540	720	900	1080	1260	1440
4					180	360	540	720	900	1080
5							180	360	540	720
6									180	360

二、延伸相關性的教學活動

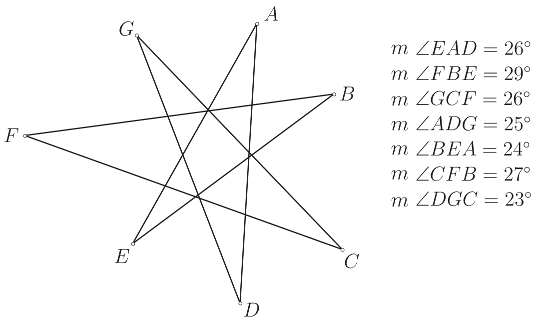
(1) 可一筆畫的圖形: 有些資料把正 n 角星 (n 爲奇數) 視爲正 n 邊形中所有最長的對角線所形成的圖形, 因此不論 n 的大小如何, 其內角總和都是 180°; 而且此正 n 角星一定可以一筆畫完成。當 n 爲偶數時, 就把正 n 角星改爲所有次長的對角線所形成的圖形, 其內角總和就爲 360°; 可是此正 n 角星不一定可以一筆畫完成。又有些資料把正 n 角星視爲將正 n 邊形的每一邊延長所相交成的圖形, 如此其內角總和就爲 $180^\circ\times(n-4)$; 這些正 n 角星就不一定可以一筆畫完成。我們也可以觀察發現到: 當 n 、d 互質時, 此正 n 角星一定可以一筆畫完成。也由於五角星可以一筆畫完成, 其線條的五個交點被古人認爲是可以封閉惡魔的「門」, 於是古人將五角星用在天使的封印上, 用來防止惡魔的侵犯。(見圖九)。

圖九

(2) 軸對稱性: 正 n 角星是軸對稱圖形, 有 n 條對稱軸。

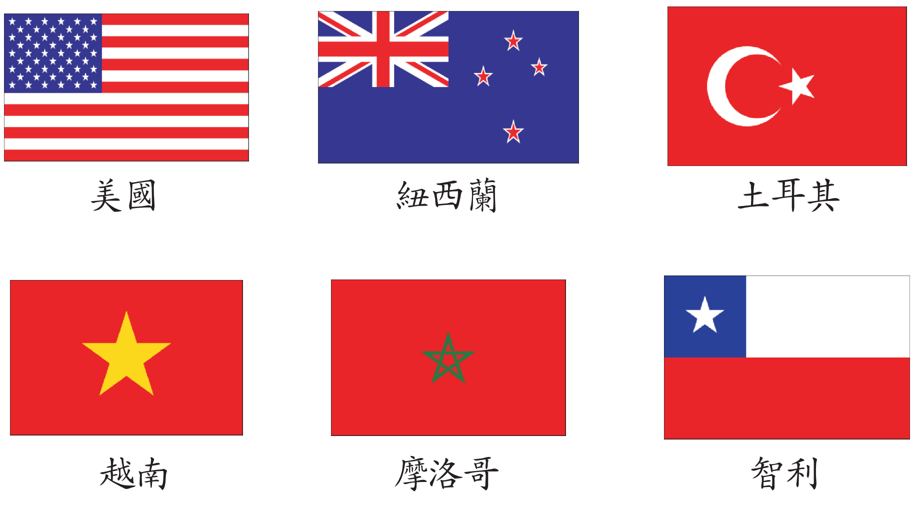
(3) 旋轉不變性: 繞中心點旋轉 $\dfrac{360^\circ}{n}$, 所得的圖形與原圖形重合。

(4) 利用橡皮筋性質 (拓樸的不變性), 公式 $180^\circ\times(n-2d)$, 其中 $1<d<\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 亦可適用於非正 n 角星的內角求和中。我利用 GSP 繪圖做實驗性數學, 來佐證這個論點 (見圖十)。



圖十

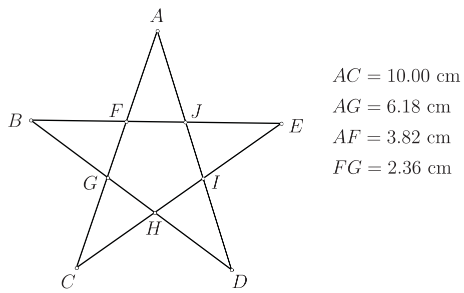
(5) 五角星的歷史: 五角星 (pentagram) 一詞出於希臘語中的 pentagrammos, 原意大概是「五條直線的」。最早對五角星的使用被發現是在美索不達米亞的文獻資料中 (大約公元前3000年)。在巴比倫語的文獻中, 五角星的頂點可能表示定位: 前 、後 、左 、右 、上; 這些方向有一個占星學上的涵意, 代表五個星球: 木星 、水星 、火星 、土星和金星。最有趣的是由地球望去, 圍著太陽的金星軌道每 8 年重複一次, 它自成的 5 個交叉點恰好畫出一個近乎完美的五角星。五角星也是魔術的代表符號, 用正的五角星作魔法陣是白魔法, 用倒的五角星則是象徵黑魔法。初期基督教會亦用五角星代表耶穌的五個傷口, 現在則多代表異教徒和撒旦主義者。現今世界上許多國家的國旗上有五角星, 如美國 、越南 、摩洛哥 $\cdots$ 等 (見圖十一)。據說摩洛哥國旗上的五角星代表神和摩洛哥之間的聯繫。



圖十一

(6) 黃金比例 (golden ratio): 因為正五角星的線條比例藏著漂亮的黃金比例 0.618 (見圖十二), 相傳古希臘的畢達哥拉斯學派 (school of Pythagoras) 將正五角星視為完美的圖形並把它當作學派的標記; 又因為它看起來像五個聯繫在一起的大寫英文字母「A」, 所以又稱

它爲「五芒星」(見圖十三)。



圖十二

圖十三

參考文獻

1. 國中數學第四冊, 康軒文教事業, P.114 、P.122, 民 96 年。
2. 任景業, 耐人尋味的圖案—五角星, 數學教育第二十一期, 2005年12月。
3. 雷網—世界各國國旗。
4. 五角星—維基百科 (Wikipedia)。
5. 關樹培、良景信, 數星星 星星數, 香港教育學院數學系。

—本文作者任教台中市曉明女中國中部—