數學傳播 33卷1期, pp. 22-43

幾何基礎論與連續性的發現和認知

項武義

引子: 我們和宇宙中所有事物與現象共存於其中的空間 (space) 具有簡樸、精微、完美兼備的本質。理性文明中的幾何學乃是人類對於空間本質世代相承精益求精的認知之結晶, 它自然而然也理所當然的是理性地理解大自然的先行者和奠基者, 是當之無愧的第一科學。

概括言之, 空間的基本性質可以歸結成下述四點:

(1) 連結與分隔: 如兩點定一直線 (或直線段) 不共線三點定一平面等等。
(2) 對稱性: 空間對於任給平面的反射對稱性及其所反映的疊合性質如 S.A.S. 等等。
(3) 平直性: 三角形之內角和恆等於一個平角及其邏輯等價的平行性。
(4) 連續性: 一條直線是連續不斷, 但是一剪就斷!

總而言之, 幾何學所研究、探討者也就是對於上述四種空間基本性質及其交互作用作有系統的深入研討。此事歷經數千年世代相承精益求精, 方有至簡至精的現代幾何學。它不但是理性文明的瑰寶, 也是理性文明的基礎所在。今天將以幾何基礎論與連續性的發現與認知爲主題, 概述其要。

§1. 定性平面幾何 (概要)

"平面" 是空間中的二維平直子集, 例如常見、常用的紙片和版面都是平面的局部化, 而我們視覺之所基的視網膜, 本質上乃是二維的。由此可見, 平面圖象是一目瞭然的, 先行研討平面幾何乃是進而研究空間幾何的最佳起步與入門。再者, 在平面幾何的研究中, 又自然地得先從定性層面做起, 然後才能進而研究定量平面幾何。

長話短說, 在定性平面幾何中, 我們研討平面的幾何圖形在連結、分隔與疊合 (亦即全等形) 上的表現, 在此僅僅簡述其概要如下:

1) 疊合與對稱:

平面對於其中任給一條直線的反射對稱性 (reflection symmetry) (亦稱之爲軸對稱) 乃是平面上最爲簡樸的保長變換 (length preserving transformations), 其他如平移、旋轉或心對稱性 (central symmetry) 都可以由兩個軸對稱組合而成。在希臘幾何中, 以對稱性在平面形上的反映 — 疊合性 (亦即全等形) 的研討來表達之, 其基點在於 "S.A.S. 疊合條件" 和下述

等腰三角形特徵定理:

如圖一所示, 等腰三角形具有下述邏輯等價的特徵性質:

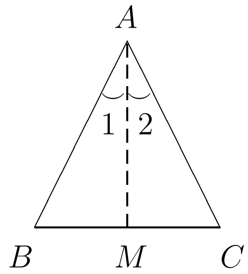
(i) $\overline{AB} = \overline{AC}$ (定義)

(ii) $\angle B = \angle C$

(iii) $\angle 1 = \angle 2$ 和 $\overline{BM} = \overline{MC}$

(iv) AM 垂直平分底邊

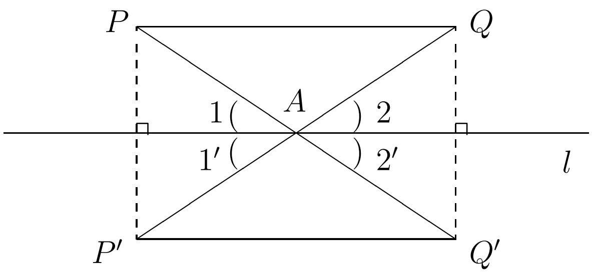
(v) $\angle 1 = \angle 2$ 和 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$



(圖一)

[註]: 等腰三角形是唯一具有軸對稱 (亦即以 $\overline{AM}$ 爲其對稱軸) 的三角形, 它是軸對稱性 "具體而微的表現", 也是研討對稱性在幾何中各種、各樣的表現的基本引理 (fundamental lemma)。其實, 在所有全等形和對稱性的討論中, 用來用去總是 S.A.S. 和等腰三角形的上述特徵性質之間的轉換。再者, 在這種論證之中所用到的 "補助線", 往往就是把所給的圖形之中所隱含有的等腰三角形給以重現是也!

2) 軸對稱的保長性:



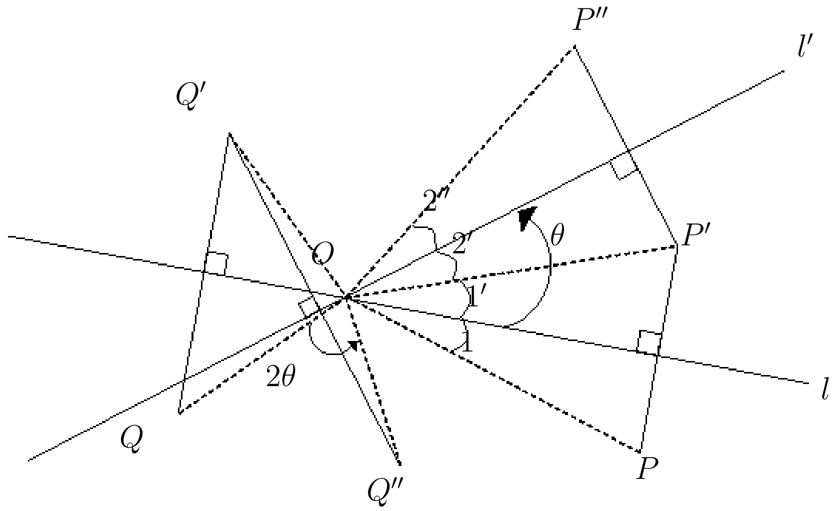
(圖二)

設 P、P' 和 Q、Q' 分別是對於直線 l 的對稱點, 亦即 $\overline{PP'}$ 和 $\overline{QQ'}$ 皆爲 l 所垂直平分。易見 $\triangle APP'$ 和 $\triangle AQQ'$ 皆爲等腰三角形, 因此 $\triangle APQ$ 和 $\triangle AP'Q'$ 滿足 S.A.S., $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$。 $\square$

3) 旋轉對稱:

設 l 和 l' 是相交於 O 點的直線, θ 爲其由 l 轉向 l' 的角度。令 R, R' 分別是平面對於

l, l' 的軸對稱, 則兩者的組合, 即 $R' \circ R$, 乃是平面繞 O 點的 2θ 旋轉。



(圖三)

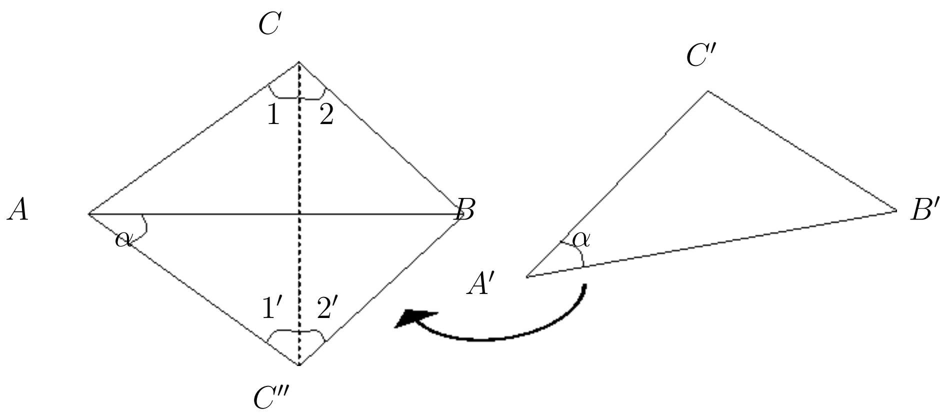
如圖三所示, $\triangle OPP'$ 和 $\triangle OP'P''$ 都是等腰三角形, 所以 $\angle 1 = \angle 1'$, $\angle 2' = \angle 2''$, 再者

$$\angle 1' + \angle 2' = \theta, \quad \angle POP'' = \angle 1 + \angle 1' + \angle 2' + \angle 2'' = 2\theta.$$

[注意]: 上述角度皆爲有向者。再者, $R \circ R'$ 則是平面繞 O 點的 (-2θ)-旋轉。在 l 和 l' 互相垂直的特殊情形, 亦即 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 則 $R' \circ R = R \circ R'$ 乃是對於 O 點的心對稱。

4) **S.S.S. 定理:** 設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三組對應邊分別等長, 則它們全等。

證明: 只需再得出一組對應角相等, 即可用 S.A.S. 得知它們全等。設 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ 是三邊中之最長者, 如圖四所示, 我們可以在 AB 之另一側作 C'' 點, 使得 $\triangle ABC''$ 和 $\triangle A'B'C'$ 全等。



(圖四)

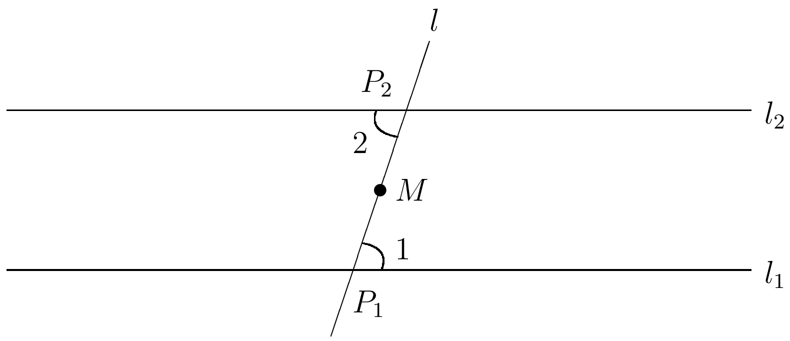
由所作, 易見 $\Delta ACC''$ 和 $\Delta BCC''$ 皆爲等腰, 所以有

$$\angle 1 = \angle 1' \quad \text{和} \quad \angle 2 = \angle 2' \Rightarrow \angle C = \angle C''. \qquad \square$$

[註]: 上述 S.S.S. 定理是很多基本作圖的依據。

5) **定理:** 設相異的直線 l_1、l_2 和 l 分別交於 P_1、P_2。若如圖五所示的內錯角相等, 則 l_1 和 l_2 不相交。

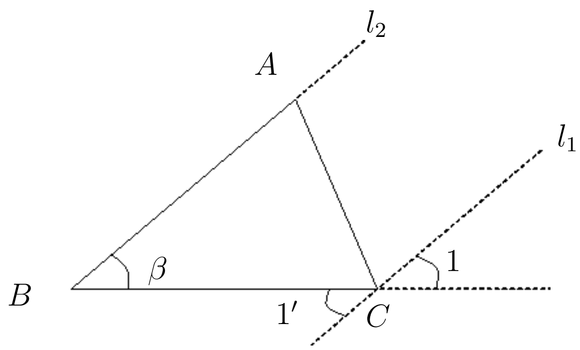
[**證明**]: 由所設, 圖五顯然對於 $\overline{P_1P_2}$ 之中點 M 成心對稱, 所以假若 l_1, l_2 交於一點 Q, 則 l_1, l_2 亦必然交於 Q 的心對稱點 Q'。亦即有矛盾 l_1, l_2 交於兩點。 $\square$



(圖五)

6) **推論1:** 三角形的任一外角, 恆大於其內對角。

[**證明**]:



(圖六)

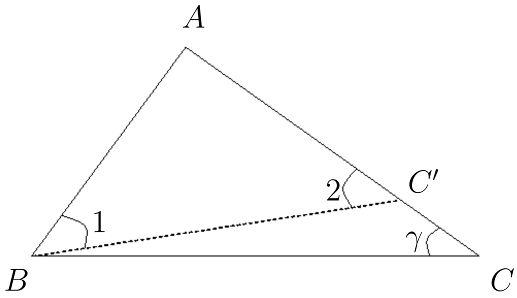
如圖六所示, 過 C 點作 l_1 使得 $\angle 1 = \beta$, 則 l_1 和 l_2 不相交, 所以 A、B 居於 l_1 之同側, 亦即 $\beta < (\pi - \angle ACB)$ (外角)。 $\square$

7) **推論2:** 大邊對大角, 大角對大邊。

[證明]: 設 $\overline{AC} > \overline{AB}$。在 $\overline{AC}$ 上取 C' 點使得 $\overline{AC'} = \overline{AB}$, 亦即 $\triangle ABC'$ 等腰, 則有

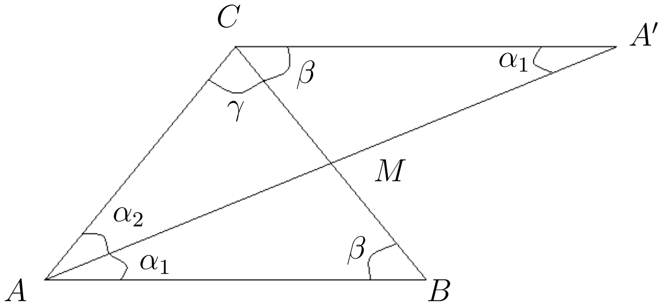
$$\angle ABC > \angle 1 = \angle 2 > \angle C$$

亦即大邊對大角。
[其逆定理 "大角對大邊" 之證明留作習題]。
□



(圖七)

8) **定理:** 任給三角形之三內角之和恆小於或等於一個平角。



(圖八)

[證明]: 用反證法: 設有 $\triangle ABC$, 其內角和等於 $\pi+\delta$, $\delta > 0$; 令 $\angle A$ 是其三內角中之最小者, A' 是 A 對於 $\overline{BC}$ 中點 M 的心對稱點, 則有 $\triangle ABM \cong \triangle A'CM$, 所以 $\triangle AA'C$ 的內角和

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta+\gamma = \alpha+\beta+\gamma = \pi+\delta, \quad \alpha_1+\alpha_2 = \alpha$$

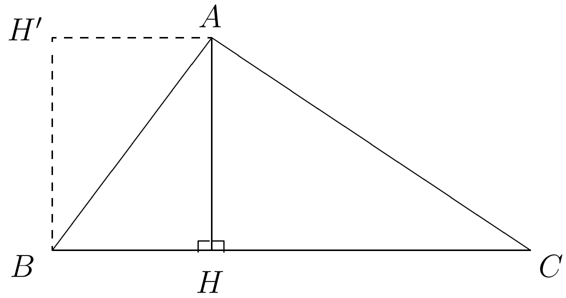
如此即得另一三角形, 其最小內角 $\le$ 原先的最小內角之半, 而其內角和依然等於 $\pi+\delta$。如此逐步構造, 即可得出一個三角形其內角和依然是 $\pi+\delta$, 但是它的最小內角小於 δ! 此事顯然和推論1 相矛盾, 因此原本那個內角和等於 $\pi+\delta$ 者是根本不可能存在的! □

9) **定理:** 若存在有一個三角形, 其內角和等於一個平角, 則任何三角形的內角和皆恆等於一個平角。

[證明]: (i) 設有 $\triangle ABC$ 其內角和爲 π, $\overline{BC}$ 是其最長邊。如圖九所示, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 把 $\triangle ABC$ 分割成兩個直角三角形 $\triangle ABH$ 和 $\triangle AHC$。易見

$$\triangle ABH\text{之內角和} + \triangle AHC\text{之內角和} = (\angle A+\angle B+\angle C)+\pi = 2\pi$$

再者, 由上述定理 (8), 兩者之內角和都 $\leq \pi$, 所以兩者之內角和都必須等於 π。

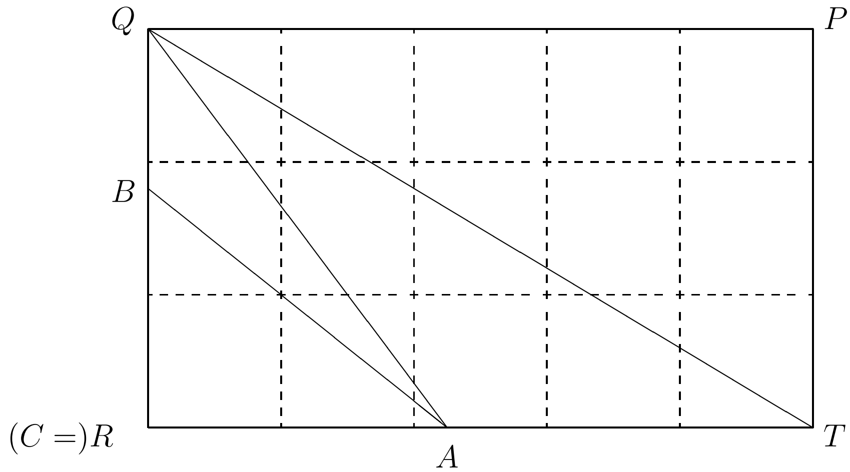


(圖九)

(ii) 由一個內角和等於 π 的直角三角形, 例如 $\triangle ABH$, 即可構造如圖九所示的矩形 $\square AH'BH$。它的四個內角都等於 $\frac{\pi}{2}$ (直角)。由它用如圖十所示的 "砌磚法", 即可構造任意大的矩形; 即得一個足夠大的內角和等於 π 的直角三角形 $\triangle QRT$, 它可以把一個任給的直角三角形 $\triangle ABC$, 包含於其內, 而且兩者之直角相疊合。由於 $\triangle QRT$ 和 $\triangle QTP$ 全等 (S.S.S), 所以 $\triangle QRT$ 的內角和等於 π, 又因爲

$$\begin{aligned}
& \triangle QRA \text{ 之內角和} + \triangle QAT \text{ 之內角和} = (\angle R + \angle RQT + \angle QTR) + \pi = 2\pi \\
[\text{用定理}(8)] \Rightarrow\ & \triangle QRA \text{ 的內角和} = \pi \\
\Rightarrow\ & \triangle QBA \text{ 的內角和} + \triangle ABC \text{ 的內角和} = (\angle R + \angle RQA + \angle QAR) + \pi = 2\pi \\
[\text{再用定理}(8)] \Rightarrow\ & \triangle ABC \text{ 的內角和} = \pi \\
\Rightarrow\ & \text{任意三角形的內角和都必須等於 } \pi!
\end{aligned}$$

$\square$



(圖十)

[歷史的註記]:

上述兩個引人入勝的定理, 乃是希臘幾何學中主要的欠缺, 這也就是自古希臘以來, 幾何學界一直被 “平行公設” (亦稱第五公設) 困擾達兩千多年的原由, 如今有了上述兩個定理, 我們就明確地認識到整個幾何學的進一步研究, 面臨了一個極爲根本的重大選擇: 亦即我們必須在下述唯二的選項, 即

其一: 三角形內角和恆等於 π 的空間,

其二: 三角形內角和恆小於 π 的空間,

選用其中之一才能繼續前進, 研究定量 “平面” 幾何。這也就是如今稱之謂歐氏幾何學 (Euclidean geometry) 和非歐幾何學 (Non-Euclidean geometry) 的分野所在。今天將選用前者, 再進而討論 (歐氏) 定量平面幾何。

§2. 平直性與定量平面幾何基礎初論

在研究大自然的本質上, 先由定性層面起始, 再進而研究定量層面, 這乃是各種各樣自然科學的研究中, 由表及裡, 精益求精的自然途徑與進程。這方面, 在研究空間之本質的幾何學中的具體做法和成就, 實爲其典範與先河。

大體上來說, 在定性平面幾何中所研討者是平面形之間等或不等的關係。例如兩條直線段 (或兩個角) 它們是否等長 (或角度相等); 在不相等的情形, 我們只比較其孰長孰短 (或孰大孰小)。但是在定量平面幾何的研討中, 對於兩條不等長的直線段 (或不相等的角度), 我們將以兩者在*長度* (或*角度*) 上的*比值* (ratio) 來度量 (measure) 它們之間的*差別* (differences)。唯有通過這種高要求的*定量分析* (quantitative analysis), 才能夠穿透表象, 由表及裡, 精益求精地理解到大自然的至精至簡的本質。長話短說, 讓我們在此且以定量平面幾何學爲例, 來討論其具體做法; 並且初步體認定量分析的威力與所得之精簡。

定量平面幾何的精簡可以概括如下:

(一) 基礎理論: 矩形、平行四邊形與三角形的面積公式, 勾股弦 (亦即畢氏) 定理與相似三角形定理。

(二) 三角形與圓是平面幾何的精簡基本事物 (basic geometric objects)。將上述基本定理用來研究圓與三角形, 即得

  (i) 圓的解析描述 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ 和三角函數的基本性質, 例如 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, 複角公式等等。

  (ii) 三角形的解析幾何, 例如三角學 (trigonometry) 中的正弦、餘弦定律以及面積公式, 內切、外接圓半徑公式等。

再者, 它們業已構成定量平面幾何中, 以簡御繁的一組基本工具。

在中、西古文明的定量平面幾何, 都發現了同樣的基本定理, 即面積公式, 勾股弦 (畢氏) 定理和相似比例式。但是在處理方式和格調上卻又各具特色, 茲各簡述概要如下:

I. 中國古算中的定量平面幾何:

中國古算善用面積公式, 以矩形面積等於長×寬爲基點, 直接推導直角三角形面積公式, 勾股弦公式和出入相補公式, 其面積證法大致如下:

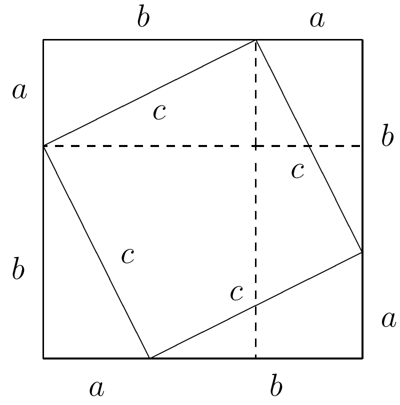
勾股弦公式:

$$勾方 + 股方 = 弦方$$
$$(a^2+b^2=c^2)$$

如圖十一所示, 一個 $(a+b)$ 爲邊長的正方形用兩種分割法分別求面積如下, 即

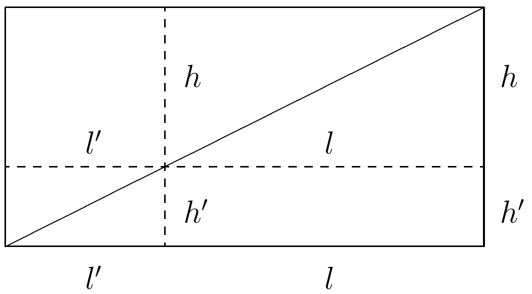
$$其一: \ a^2+b^2+2ab$$
$$其二: \ c^2+4\Big(\frac{1}{2}ab\Big)$$

兩相比較, 即得 $a^2+b^2=c^2$。



(圖十一)

出入相補公式:



(圖十二)

如圖十二所示, 一個長、寬分別是 $(l+l')$ 和 $(h+h')$ 的矩形, 其對角線把它分割成一對全等的大直角三角形。同樣地, 把長、寬分別是 $\{l,h\}$ 和 $\{l',h'\}$ 者也分割成兩對全等的小直角三角形。由等面積減去等面積, 其差依然相等的 "出入相補" 原理, 即得所剩下的兩個矩形之面積相等, 亦即

$$l\cdot h'=l'\cdot h \Rightarrow \frac{l}{l'}=\frac{h}{h'} \Rightarrow \frac{l+l'}{l'}=\frac{h+h'}{h'}$$

它其實就是上述大、小相似直角三角形的直角邊邊長比例式。在中國古算中, 將它和面積公式、勾股弦公式結合運用, 業已構成一套完備的測量術。

II. 古希臘之定量平面幾何基礎 (初) 論:

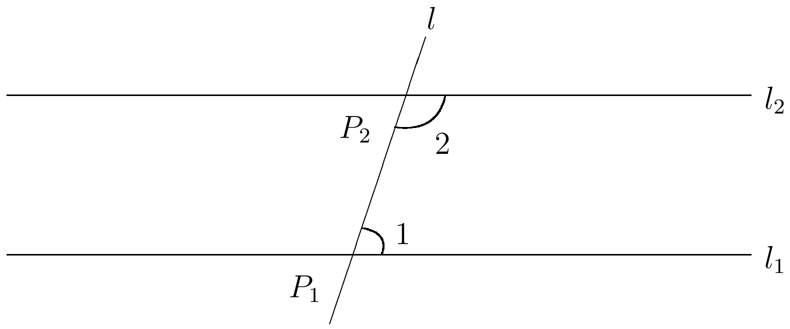
古希臘文明的幾何學是在繼承了古埃及與巴比倫的幾何知識的基礎上, 更上層樓, 集數百年之精英, 世代相承研究探討之所成。古希臘的幾何學家們高度重視理論上的嚴密性。在他們進而研究定量平面幾何時, 業已充分認識到直線段的長度度量乃是整個定量幾何的最爲基礎的基本概念(the most fundamental basic concept)。長話短說, 當年對此事的處理方式如下:

首先提出下述可公度性 (commensurability) 的定義, 即

定義: 若兩個線段 a、b 都是另一線段 c 的整數倍, 亦即 a、b 各自可以等分爲 m、n 段和 c 等長的線段連接而成 (以符號 $a=m\cdot c, b=n\cdot c$ 表之), 則稱 $\{a,b\}$ 爲可公度 (commensurable), 稱 c 爲它們的一個公尺度 (common yardstick)。

然後斷言 (assert): 任何一對線段 $\{a,b\}$ 都一定是可公度的, 並且定義分數 $\frac{m}{n}$ 爲 a、b 在長度上的比值 (ratio), 以 $a:b=\frac{m}{n}$ 表之。換言之, 古希臘定量幾何基礎(初) 論是建築在可公度性的普遍成立 (universality of commensurability) 這一基石之上者, 亦即以它爲頭號公理 (first axiom) 的基礎論。再者, 他們也充分體認到平直性 (亦即三角形內角和恆爲平角) 在定量幾何中的重要性, 只不過當年採用的描述法是下述 “平行公理” (亦即第五公設):

平行公理 (parallel axiom): 設平面上一對相異直線 l_1, l_2 和另一直線 l 相交, 若兩個同傍內角 (如圖十三所示之 $\angle 1$ 和 $\angle 2$) 之和小於平角, 即 $\angle 1+\angle 2<\pi$, 則 l_1 和 l_2 必然在 l 之該側相交。



(圖十三)

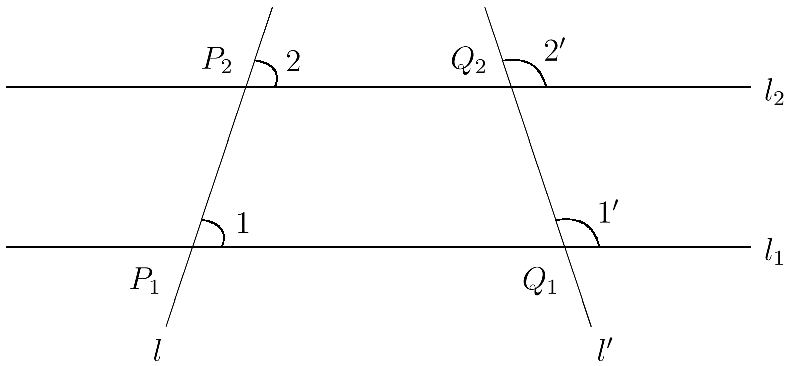
[註]: (i) 本質上, 上述公設之來由大致如下: 在

$$\angle 1+\angle 2=\pi$$

的特殊情形, §1 的定理 (5) 業已證明 l_1, l_2 不相交, 但是又無法證明上述特殊情形是唯一不相交的情況, 亦即平面上過線外一點的不交線的唯一性。但是他們業已認識到上述唯一性在所有

基本公式如面積公式、畢氏定理和相似三角形比例式的論證上是不可或缺的! 總之, 既有此必要, 又無法證之, 所以唯一的出路就是把它列爲公設。

(ii) 其實, 不難證明上述 "平行公理" 和 "三角形內角和恆爲平角" 的邏輯等價性。再者, 也唯有三角形內角和恆爲平角, 才能保證下述平行線的檢驗法則的邏輯合理性:



(圖十四)

$\angle 1 = \angle 2 \Leftrightarrow \angle 1' = \angle 2'$ (同位角相等的邏輯等價性)

[注意: 上述等價乃是基於四邊形 $P_1Q_1Q_2P_2$ 的內角和 $= 2\pi$。]

大約在紀元前五世紀, 希臘幾何學家們以上述平行公理和 "可公度性的普遍成立這個頭號公理" 爲基點, 對於定量幾何中的基本定理都逐一加以嚴格論證, 建立起一個洋洋大觀的基礎論, 此事畢氏學派貢獻良多, 並引以自豪。

[註]: 當年並不知道其他公式都可以由矩形面積公式簡潔地推導而得, 所以是逐一論證。如今回顧, 其實只需先證矩形面積公式, 然後即可套用中國古法。有鑒於此, 今天在此只介紹當年對於矩形面積公式之論證如下:

矩形面積公式: 以 $\square(l,w)$ 表示長、寬分別是 l、w 的矩形面積, u 表示單位長, 則有

$$\square(l,w) : \square(u,u) = (l:u)\cdot(w:u)$$

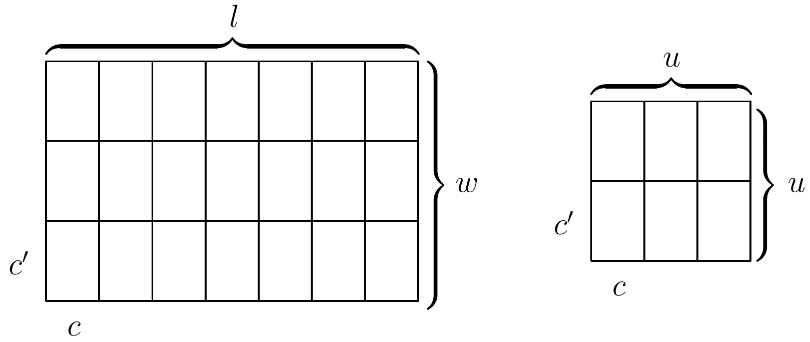
[**證明**]: (基於可公度性普遍成立) 令 c 和 c' 分別是 $\{l,u\}$ 和 $\{w,u\}$ 的公尺度, 即有

$$l = m\cdot c, \quad u = n\cdot c, \quad w = p\cdot c', \quad u = q\cdot c'$$

亦即 $l:u = \frac{m}{n}$, $w:u = \frac{p}{q}$ 。

如圖十五所示, 可以用平行分割把長、寬爲 l、w 的矩形和單位邊長的正方形, 分別分割成以 c, c' 爲其長、寬的小矩形。前者有 mp 個, 後者則有 nq 個, 所以

$$\square(l,w) : \square(u,u) = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q} = (l:u)\cdot(w:u)$$

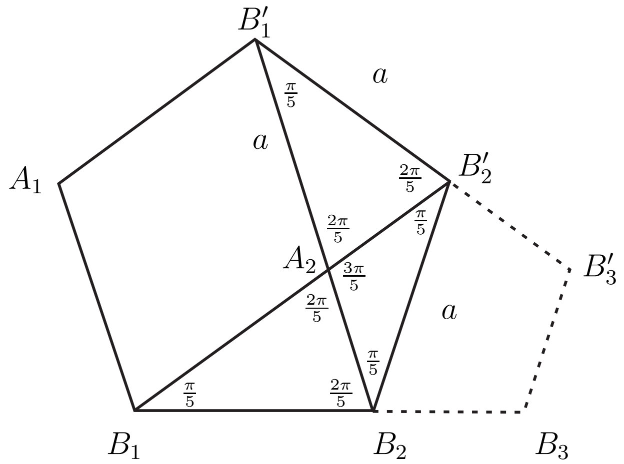


(圖十五)

§3. Hippasus 的偉大發現 — 初遇連續性

話說當年, 畢氏門徒 Hippasus 又在沙盤上畫了如圖十六所示的正五邊形和兩條對角線, 並且將上次用 “內角和定理” 與 “等腰三角形定理” 分析所得的角度逐一標記。

(圖十六)



(大正五邊形的邊長爲 a, 對角線長爲 b, 小正五邊形的邊長爲 $r_1 = b - a$, 對角線長爲 a)

從而得知 $\triangle B_1B_2A_2$ 和 $\triangle B_1'B_2'A_2$ 是頂角爲 $\frac{\pi}{5}$ 的等腰三角形, 而 $\triangle A_2B_2B_2'$ 則是頂角爲 $\frac{3\pi}{5}$ 的等腰三角形, 那天他突發異想把 $\overline{B_1B_2}$ 和 $\overline{B_1'B_2'}$ 各延長一段 $\overline{B_2B_3} = \overline{B_2'B_3'} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_2B_2'}$, 從而發現 $\pentagon A_2B_2B_3B_3'B_2'$ 又是一個正五邊形! 它的對角線長等於原先的邊長, 而它的邊長則是原先的對角線長和邊長之差, 亦即

$$b = \overline{B_1B_2'} = a + \overline{A_2B_2'} = a + r_1$$

也許同學們在此會覺得此事何足爲奇? 但是它卻使得 Hippasus 驚恐莫名! 爲什麼呢? 因爲他當年一直還在思考線段之間的可公度性, 而且早已認識到由一對可公度的給定線段 $\{a, b\}$, 可以用下述輾轉丈量法去求它們的最長公尺度 (longest common yardstick):

以較短的 a 去丈量 b, 若能整量 (即 $b=q_1\cdot a$) 則 a 當然就是所求之最長公尺度。不然, 即有

$$b=q_1\cdot a+r_1,\quad 0<r_1<a$$

再以餘段 r_1 去丈量 a, 若能整量則 r_1 就是所求之最長公尺度。不然, 即得另一餘段 r_2, 使得

$$a=q_2\cdot r_1+r_2\quad 0<r_2<r_1$$

如此輾轉丈量一直到最後一個餘段 r_k 能夠整量前者 r_{k-1} 爲止, 則 r_k 就是 $\{a,b\}$ 的最長公尺度。

[註]: 由可公度性, 即有公尺度 c, 使得 $a=m\cdot c$, $b=n\cdot c$ 。令 d 爲 $\{m,n\}$ 的最大公因數, 則 $c'=d\cdot c$ 就是 $\{a,b\}$ 的最長公尺度。由此可見, 同學們所學到的輾轉相除求最大公因數 (通常稱之爲 Euclid algorithm), 其實是起源於上述輾轉丈量法求最長公尺度! 理當改名之謂 Hippasus 算法。

由上述圖解, Hippasus 認識到一個正五邊形的邊長 a 和它的對角線長 b 是不可公度的! 因爲 $\{r_1,a\}$ 又是另一個小一號的正五邊形的邊長和對角線長! 所以逐步輾轉丈量所得的 $\{r_k,r_{k-1}\}$ 總是一個個逐步縮小的正五邊形的邊長和對角線長, 亦即

$$\begin{aligned}b&=a+r_1,\\a&=r_1+r_2,\\r_1&=r_2+r_3,\\&\vdots\\r_{k-1}&=r_k+r_{k+1},\end{aligned}$$

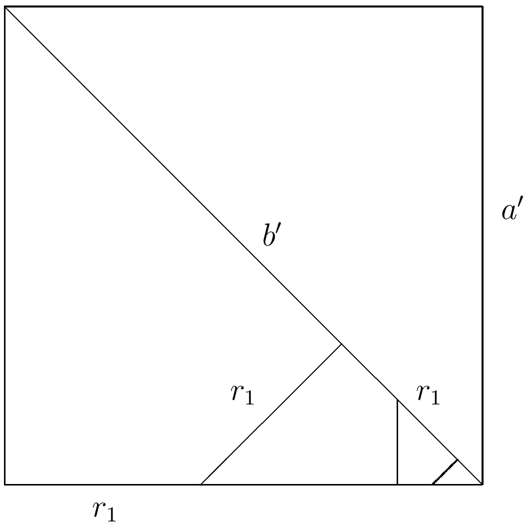
總之, 此事顯然永無止休! 所以 $\{a,b\}$ 是不可能可公度者也!! 亦即畢氏學派引以自豪的定量幾何基礎論的 “頭號公理” 根本是不對的! 此事當然會讓他驚恐莫名!

接著, Hippasus 再用下述圖解證明正方形的邊長和對角線長 $\{a',b'\}$ 也是不可公度的。如圖十七所示可以看出 $\{a',b'\}$ 的輾轉丈量所得的逐步算式如下:

$$\begin{aligned}b'&=a'+r_1,\\a'&=2r_1+r_2,\\r_1&=2r_2+r_3,\\&\vdots\end{aligned}$$

(往後的表達式總是 $r_{r-1}=2r_k+r_{k+1}$)

所以也是永無止休的。(細節作爲習題)



(圖十七)

[歷史的註記]: Hippasus 的偉大發現, 是人類理性文明的重要里程碑, 第一次深刻地觸及到空間的連續性, 有如發現了一個理念上的新大陸 — 連續世界。它不但對於定量幾何學有根本的重要性, 其實對於整個自然科學都有深遠的影響。

但是當年畢氏學派對於這個偉大的發現, 其反應卻是全然無理性的。據某些現在業已無法詳加考證的記載, Hippasus 反而因此喪生於同門之手。

其實, 不可公度量的存在, 並非全面否定了當年定量幾何基礎 (初) 論上的成就, 它事實勝於雄辯地說明, 原本以爲業已完整無缺的證明, 其實只是在可公度的特殊情形的證明; 而在一般不可公度的情形, 則尚有待補證! 這個極待補證的任務, 對於當代的古希臘幾何學界, 是一個嚴峻而且迫切的挑戰。此事大約經歷了半世紀的努力, 終於由 Eudoxus 完成了定量幾何基礎論的重建。

§4. Eudoxus 的宏偉創建 — 幾何基礎論的重建與連續性的認知

Eudoxus 逼近法和逼近原理:

當 $\{a, b\}$ 是不可公度時, 其比值 $a : b$ 不是熟悉的分數, 它乃是一種有待理解的新東西, 不妨稱之謂一種 "新的幾何量"。經過長期的思索與分析, Eudoxus 認識到下述幾點, 即

(i) 在 $\{a, b\}$ 和 $\{a', b'\}$ 都是不可公度的情形, "新量" $a : b$ 和 $a' : b'$ 之間的大小或相等關係其實還有待明確 (亦即有待妥加定義)。

(ii) 在 $\{a,b\}$ 不可公度, 但是 $\{a',b'\}$ 可公度的情形, 亦即 $a':b'=\frac{m}{n}$ 的情形, 則 $a:b$ 和 $\frac{m}{n}$ 之間的大小關係。應當以下述比較原則刻劃之, 即

Eudoxus 比較原則 (comparison principle):

$$a:b\begin{cases}>\frac{m}{n}\\<\frac{m}{n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\text{ 比 }\frac{m}{n}b\text{ 長}\\a\text{ 比 }\frac{m}{n}b\text{ 短}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\cdot a>m\cdot b\\n\cdot a<m\cdot b\end{cases}$$

(iii) 設 $\{a,b\}$ 和 $\{a',b'\}$ 皆爲不可公度, 而且存在有適當的 m, n 使得

$$n\cdot a>m\cdot b\text{ 但是 }n\cdot a'<m\cdot b'$$

即有 $a:b>\frac{m}{n}>a':b'$, 則顯然有 $a:b>a':b'$, 反之若有

$$n\cdot a<m\cdot b\text{ 但是 }n\cdot a'>m\cdot b'$$

則顯然有 $a:b<a':b'$。

基於上述三點分析, Eudoxus 對於兩個 “新量”, $a:b$ 和 $a':b'$, 之間的大小和相等關係賦於下述明確之定義, 即

不可公度比的大小或相等之定義:

$$\begin{cases}a:b>a':b' & \Leftrightarrow\ \text{存在分數 }\frac{m}{n}\text{ 使得 }a:b>\frac{m}{n}>a':b'\text{, 亦即 }n\cdot a>m\cdot b\\ & \qquad\text{但是 }n\cdot a'<m\cdot b'\\ a:b<a':b' & \Leftrightarrow\ \text{存在分數 }\frac{m}{n}\text{ 使得 }a:b<\frac{m}{n}<a':b'\text{, 亦即 }n\cdot a<m\cdot b\\ & \qquad\text{但是 }n\cdot a'>m\cdot b'\\ a:b=a':b' & \Leftrightarrow\ \text{對於任給分數 }\frac{m}{n}\text{, }a:b\text{ 和 }a':b'\text{ 和 }\frac{m}{n}\text{ 都有同樣的大}\\ & \qquad\text{小關係, 亦即對於任給 }m,\ n\text{ 皆有 }n\cdot a\{\gtreqless\}m\cdot b\Leftrightarrow\\ & \qquad n\cdot a'\{\gtreqless\}m\cdot b'\ \text{(同步)}\end{cases}$$

爲了論證上述定義的必然性, Eudoxus 開創了影響極爲深遠的逼近法 (method of approximation)。首先, 他提出下述直觀上極爲明顯的 “公設”, 作爲其論證的依據: (亦即目下誤名之爲 Archimedes Axiom 者)

公設: 任給兩個線段 $\{a,b\}$, 不論 a 有多短, b 有多長總是有足夠大的整數 N 使得 $N\cdot a>b$。

Eudoxus 逼近定理: 設 $\{a,b\}$ 不可公度, 則對於任給正整數 n, 恆有適當的 m 使得

$$\frac{m}{n}<a:b<\frac{m+1}{n}$$

[亦即將新量 $a:b$ 左、右夾逼於相差是 $\frac{1}{n}$ 的分數之間。]

[**證明**]: 由上述公設, 必有足夠大的 N, 使得 $\frac{1}{n}b$ 的 N 倍要比 a 長, 令 $(m+1)$ 是這種 N 之中的最小者, 則有

$$m\Big(\frac{1}{n}b\Big)<a<(m+1)\Big(\frac{1}{n}b\Big)$$

亦即 $\frac{m}{n}<a:b<\frac{m+1}{n}$。 $\square$

推論1: 設兩個新量 $a:b$ 和 $a':b'$ 對於任給分數皆有相同的大小關係, 則 $a:b=a':b'$。

[**證明**]: 由所設, 對於任給 n (不論有多大), 都有相應的 m 使得

$$\frac{m}{n}<a:b,\quad a':b'<\frac{m+1}{n}$$

因此 $a:b$ 和 $a':b'$ 之間的差別要比所有$\frac{1}{n}$都小, 所以其差別只能是 0! 亦即 $a:b{=}a':b'$。$\square$

推論2: 設兩個不可公度比 $a:b$ 和 $a':b'$ 不相等, 則必然存在有分數 $\frac{m}{n}$ 和兩者有不同的大小關係, 即

$$a:b>\frac{m}{n}>a':b'\ \text{ 或 }\ a:b<\frac{m}{n}<a':b'.$$

Eudoxus 對於幾何基礎論之重建 (概述其要點):

有了上述思想和逼近法, 再進而重建定量幾何基礎論, 乃是順理成章之事, 要點在於將原先僅僅對於可公度的特殊情形給出其證明者如矩形面積公式, 相似三角形定理等, 給以其在不可公度的情形之 "補證"。

矩形面積公式: $\square(l,w):\square(u,u)=(l:u)\cdot(w:u)$

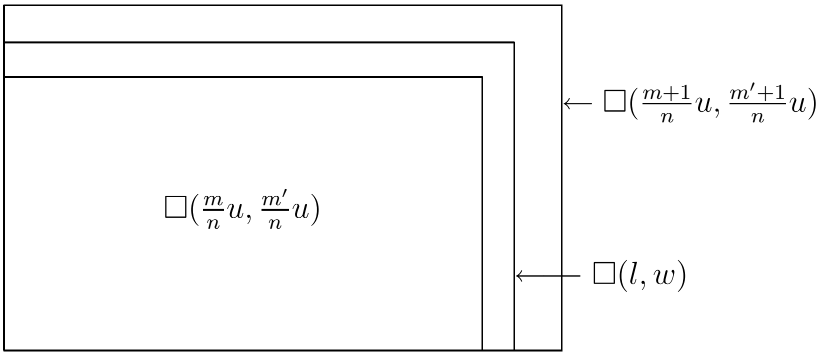
在 $\{l,u\}$ 和 $\{w,u\}$ 都是不可公度的情形之補證:

對於任給正整數 n, 不論它有多大, 皆有 m 和 m' 使得

$$\frac{m}{n}<l:u<\frac{m+1}{n};\quad \frac{m'}{n}<w:u<\frac{m'+1}{n}$$

亦即有

$$\frac{m}{n}u<l<\frac{m+1}{n}u;\quad \frac{m'}{n}u<w<\frac{m'+1}{n}u$$



(圖十八)

如圖十八所示 $\square(l,w)$ 乃是裡外夾逼於 $\square(\frac{m}{n}u, \frac{m'}{n}u)$ 和 $\square(\frac{m+1}{n}u, \frac{m'+1}{n}u)$ 之間的矩形, 顯然有

$$
\begin{aligned}
&\square\Big(\frac{m}{n}u, \frac{m'}{n}u\Big) : \square(u,u) = \frac{mm'}{n^2} \\
&< \square(l,w) : \square(u,u) \\
&< \square\Big(\frac{m+1}{n}u, \frac{m'+1}{n}u\Big) : \square(u,u) = \frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}
\end{aligned}
$$

再者, 由前述不等式相乘, 又有

$$\frac{mm'}{n^2} < (l:u)\cdot(w:u) < \frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}$$

亦即 $\square(l,w):\square(u,u)$ 和 $\square(l:u)\cdot(w:u)$ 都左、右夾逼於 $\frac{mm'}{n^2}$ 和 $\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}$ 之間,

$$\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2} - \frac{mm'}{n^2} = \frac{m+m'+1}{n^2} = \frac{1}{n}\Big(\frac{m}{n} + \frac{m'+1}{n}\Big)$$

在 n 無限增大時, 可以小到任意小, 所以兩個同時左、右夾逼於其間者當然不可能有任何差額! 亦即得證

$$\square(l,w):\square(u,u) = (l:u)\cdot(w:u). \qquad \square$$

相似三角形定理: 設有 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三個對應角皆相等, 則它的三個對應邊之比相等, 即

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$$

[註] 在其中有一對可公度的情形, 亦即 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \frac{m}{n}$, 業已用平行分割證法證明其餘兩對之比也等於 $\frac{m}{n}$。所以需要補證者乃是三對都不可公度的情形。

對於任給 n, 皆有適當的 m 使得

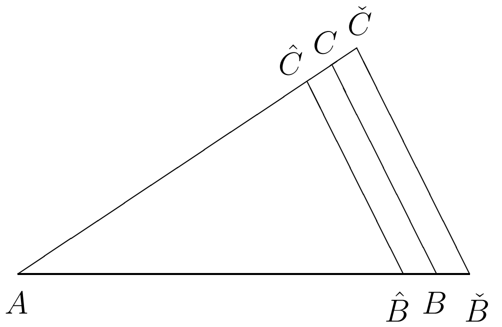
$$\frac{m}{n} < \overline{AB} : \overline{A'B'} < \frac{m+1}{n}$$

亦即

$$\frac{m}{n} \cdot \overline{A'B'} < \overline{AB} < \frac{m+1}{n} \cdot \overline{A'B'}$$

如圖十九所示: $\triangle ABC$ 內外夾逼於兩個和它們相似的 $\triangle A\hat{B}\hat{C}$ 和 $\triangle A\check{B}\check{C}$ (亦即 $\hat{B}\hat{C}//BC$ $//\check{B}\check{C}$) 而且

$$\overline{A\hat{B}} = \frac{m}{n} \cdot \overline{A'B'}, \quad \overline{A\check{B}} = \frac{m+1}{n} \cdot \overline{A'B'}$$



$$\triangle A\check{B}\check{C} \supset \triangle ABC \supset \triangle A\hat{B}\hat{C}$$
$$\overline{A\check{C}} > \overline{AC} > \overline{A\hat{C}}$$
$$\overline{\check{B}\check{C}} > \overline{BC} > \overline{\hat{B}\hat{C}}$$

(圖十九)

由業已得證可公度比的情形, 即有

$$\overline{A\hat{C}} : \overline{A'C'} = \frac{m}{n} < \overline{AC} : \overline{A'C'} < \frac{m+1}{n} = \overline{A\check{C}} : \overline{A'C'}$$
$$\overline{\hat{B}\hat{C}} : \overline{B'C'} = \frac{m}{n} < \overline{BC} : \overline{B'C'} < \frac{m+1}{n} = \overline{\check{B}\check{C}} : \overline{B'C'}$$

亦即對於三個不可公度比皆有

$$\frac{m}{n} < \overline{AB} : \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} : \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} : \overline{B'C'} < \frac{m+1}{n}$$

對於任意大的 n 恆成立。因爲左、右夾逼上述三個不可公度比的差別 $\frac{1}{n}$, 在 n 任意增大時可以小到任意小, 所以三個比值必須相等。 $\square$

[**分析**]:

(i) 在上述兩個基本定理的補證, 所用者乃是以 “可公度比” 左、右夾逼 “不可公度比” (亦即 Eudoxus 逼近定理), 再以 “業已得證” 的可公度的情形內、外夾逼 “有待補證” 的情形, 從而達成困擾當年幾何學界達半世紀的定量幾何基礎理論的重建問題。用逼近法以 “已知” 夾

逼 “未知”, 從而理解 “未知” (亦即化未知爲已知!) 的思想簡樸精到, 大智若愚, 大巧若拙, Eudoxus 的創見, 令人神往心儀, 高山仰止!

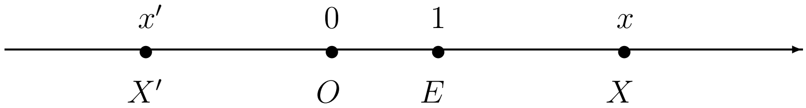
(ii) 如今回顧反思, 平直性和連續性在定量幾何基礎理論的論證上都是主角; 但是各有獨到之處。前者是用 “平行分割” 論證可公度的情形之所基, 而後者則是用逼近法把不可公度的情形加以補證之所本。我們在此回頭詳加分析, 還可以看到上述論證方法乃是必經之途, 捨此別無他法!

(iii) 驟看起來, 古希臘幾何學居然以 “可公度性普遍成立” 這種錯誤的論斷來建立定量幾何基礎論, 的確是栽了一個大跟斗。其實, 他們所完成者乃是至關重要的前半段。幸好 Hippasus 及早發現了不可公度量, 接著 Eudoxus 又能臨危受命創建逼近法來完成其後半部, 使得希臘幾何學脫胎換骨, 成爲理性文明重要基礎與永恆的典範, 如今反思, 上述歷經挫折與艱辛, 似乎有它在所難免的必然性。

(iv) 將中、西古文明的定量平面幾何作一比較分析: 兩者所得的基本公式大致相同, 即矩形, 三角形的面積公式, 勾股弦公式 (即畢氏定理) 和相似三角形的邊長比例式, 但是在基調和格局上, 則兩者是迥然不同的。中國古代的工程師研究幾何是爲了實用; 是唯用是尙的。他們善用面積公式, 的確有其獨到的長處; 但是在對於空間本質理解的深度上, 相比於古希臘幾何學的確是瞠乎其後, 難望其項背。究其原因, 相信並非是在聰明才智上有任何差別, 而是在格調、志趣和氣概上有所分野! 例如可公度性是一個純理論性的問題; 在實際的度量中, 在力所能及的準確度之下的微量根本沒有其實質意義, 所以根本不存在 “可不可公度這種問題”。由此可見, 在唯用是尙的格局下, 根本是不會有此一問! 當然也不會有 Hippasus 這種深深觸及空間連續性的發現, 和歷經半世紀的探索才結晶而得的 Eudoxus 逼近原理和方法論。由此反思同學們應該體認到局限中國古代幾何的因素乃是: “唯用是尙, 則難見精深, 而所及不遠矣! ” 而古希臘幾何學歷盡艱辛所得的輝煌成就, 給全人類的啓示與鼓舞則是: “若以理解大自然爲志趣並能世代相承, 精益求精, 則宇宙基本結構的至精至簡、至善至美是可望可及的! ”

§5. 直線連續不斷, 一剪就斷的解析描述與存在性定理

現在讓我們改用現代的觀點來分析 Eudoxus 的 “逼近論”。在一條給定的直線 l 上取定兩點 $\{O, E\}$, 取定射線 $\overrightarrow{OE}$ 爲其上之正向, $\overline{OE}$ 的長度爲單位長, 即可在 l 上建立大家所熟知習用的坐標系 (coordinate system); 它把 l 上的點和實數 (real numbers) 建立起如下的一·一對應;



(圖二十)

即

$$l \ni X \longleftrightarrow x = \overrightarrow{OX} : \overrightarrow{OE} \in \mathbb{R}\ (\text{實數系})$$

其中有向線段 $\overrightarrow{OX}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 之比值, 乃是原先的 $\overline{OX} : \overline{OE}$ 加上正、負號以區別 $\overrightarrow{OX}$ 和 $\overrightarrow{OE}$ 是 "同向" 還是 "反向"。

[歷史的註記]: 在古希臘時代, 兩個不可公度的線段之 "比值" 是一種和原先熟知習用的分數不同的 "新事物", 在心理上還未能欣然接納地把它當做 "數"。這也就是爲什麼歐氏原本 (Euclid's Elements) 在討論相似形之前, 另立一章討論比與比例, 小心翼翼地處理這種新事物的算式, 例如 "和比定律", "反比定律" 等等, 及至近代, 我們對於長度之比值早已習以爲常, 可不可公度的線段之比值皆一視同仁, 稱之爲實數。它們所組成的實數系 $\mathbb{R}$ (real number system) 是研討度量型的各種各樣量如長度、面積、角度、重量、密度等等的數系。它包含比數系 (rational number system) [注意, ratio-n-al 乃是 ratio 的形容詞形式理當譯爲 "比的", 可惜當年誤譯爲 "有理數", 然後把 irrational numbers 誤譯成無理數, 此事積非成是, 目下難以更正, 令人有啼笑皆非之嘆。]

再者, 在原本中相似三角形定理的結論敍述爲

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$$

但是一個現代化的敍述應該在其後加上 "$(= k)$", 並稱 k 爲 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的相似比, 也許同學們會問爲什麼? 差別又何在? 因爲當時在不可公度的情形的 "比值", 還不認爲是一個 "數", 但是現在早已認知其爲一個實數, 再者, 加上 $(= k)$ 和不加的差別在於前者便於計算、操作, 此事同學們在往後運用相似三角形定理時, 稍加比較, 自能體認。

改用現代的術語來描述, 則 Hippasus 的不可公度性的發現就是長度度量所自然產生的實數系 $\mathbb{R}$, 除了由正負分數所組成的比數系之外, 還有許許多多非比數 (irrationals) 亦即 $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, 而 Eudoxus 當年爲了重建幾何基礎論所創建的逼近論 (theory of apposition), 其基本思想就是任給非比數 α 皆可用兩個比數數列 (sequences of rationals) $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 來左、右夾逼之, 亦即有

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots < \alpha < \cdots \le b_{n+1} \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1, \\ \text{而且 } (b_n - a_n) \text{ 可以小到任意小} \end{cases}$$

通常以簡縮符號 $a_n \to \alpha \leftarrow b_n$ 表敍之。

在 Eudoxus 用逼近法對於矩形面積公式 (或相似三角形定理) 在不可公度的情形的補證中, 其論證的要點在於妥爲構造一對左、右夾逼數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 把所要證明其相等者, 同

時夾逼於其間, 亦即

$$a_n \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \square(l,w) : \square(u,u) \\ (l:u)\cdot(w:u) \end{array} \right\} \leftarrow b_n$$

或

$$a_n \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overline{AB} : \overline{A'B'} \\ \overline{AC} : \overline{A'C'} \\ \overline{BC} : \overline{B'C'} \end{array} \right\} \leftarrow b_n$$

由此可見, 他所用到者乃是夾逼於一對左、右夾逼數列之間的實數的唯一性, 因爲 $(b_n - a_n)$ 小可以小到任意小, 亦即 $(b_n - a_n) \rightarrow 0$, 所以有

唯一性: $a_n \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha' \end{array} \right\} \leftarrow b_n \Rightarrow \alpha = \alpha'.$
對於給定的一對左、右對夾的數列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$; 亦即有

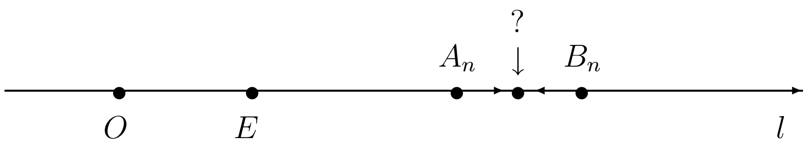
$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1, \\ \text{而且 } (b_n - a_n) \rightarrow 0 \end{cases}$$

是否恆有一個實數夾逼於其間呢? 亦即下述

存在性問題: $\exists ?\alpha$, 使得 $a_n \rightarrow \alpha \leftarrow b_n$。

在此我們不妨設想當年 Eudoxus 在講述他的逼近論時, 曾有一位學生有此一問, 猜想這位幾何大師究竟會如何回答呢? 首先, Eudoxus 本人原先是否想到過上述存在性問題? 此事有兩種可能: 即業已想過和尚未想過。總之, 我覺得這位幾何大師的回答方式大致如下:

首先, 即使他業已想過, 爲了獎掖後進他也會說這倒是一個我未曾想到的好問題! 然後在他想了一會之後的回答乃是肯定存在的! 並且以下述圖解說明其存在性:



$$\overrightarrow{OA_n} : \overrightarrow{OE} = a_n; \ \ \overrightarrow{OB_n} : \overrightarrow{OE} = b_n$$

(圖二十一)

一條直線的直觀內含是: “它連續不斷, 但是一剪就斷”。如圖二十一所示, $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 是右、左對進的點列。假若它們之間的分界點不存在的話, 豈不是直線缺了 “此點” 而不再連續的了。

由此可見, 上述存在性其實乃是 “直線連續不斷, 但是一剪就斷” 這個直觀內含的解析描述 (analytic formulation of the continuity of a line)。即

直線連續性的解析描述: 在實數系 $\mathbb{R}$ 中, 一對左、右對夾的數列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 恆存在有其分界數 α, 夾逼於其間, 即

$$\exists\alpha \text{ 使得 } a_n \to \alpha \leftarrow b_n$$

它是數學中最爲基本的存在性, 乃是其他各種各樣的存在性定理的論證基礎!

存在性定理舉例:

[**例**1] **實變多項式函數的中間值定理**: 設 $f(x)$ 是一個實變多項式函數, 若 $f(a)>k$, $f(b)<k$, 則在 $[a,b]$ 之中存在有 ζ, 使得 $f(\zeta)=k$。

[**例**2] **代數基本定理**: 設 $f(z)$ 是一個次數 ≥ 1 的複系數多項式, 則恆存在 $z_0\in\mathbb{C}$, 使得 $f(z_0)=0$。

[註]: 上述對於直線連續性的解析描述, 可以看做師法 Eudoxus 當年對於連續性的認知的一個溫故知新。再者, 中國有一句 “書到用時方恨少” 的俗語, 對於積極求知者來說, 應該把它改成: “理在用中方知妙”。它在這裡的實質意義是: 只有通過各種各樣存在定理的證明, 才能深入體會上述簡樸精到的連續性的解析描述的妙用!

§6. 逼近、極限與連續性 — 分析學的基礎

衆所週知, 逼近、極限與連續性乃是分析學的基礎所在; 而微分、積分和微積分基本定理, 連續函數的基本性質則是分析學的基礎理論, 在座的同學們有的正在學或已經學過分析學的基礎課程。今天限於時間, 且以下述幾點自己學習分析學的體驗, 以供同學們參考:

(一) Eudoxus 才是分析學的開山祖師, 他開創逼近法的思想, 重建幾何基礎論的方法, 簡樸精到; 他把以 “已知” 去認知 “未知”, 把以簡御繁的方針量化、精確化 (亦即逼近法)。例如他在研究不可公度比的起始, 開宗明義、返璞歸眞地提出比較原則, 這種平實近人, 引人入勝的論述, 在在都是值得我們師法、探究者。總之, 在學習分析學中, 向大師學習自然得從師法 Eudoxus 做起。

(二) 逼近和極限是同一事物的兩面觀。例如先有一個不可公度比 $\overline{AB}:\overline{A'B'}$ (或 $\square(l,w)$: $\square(u,u)$), 再去構造它的左、右夾逼數列, 所用到的是逼近和被夾逼於其間者的唯一性。但是在證明存在性定理時, 我們也設法構一對左、右對夾逼數列, 它們的共同極限 (common limit) 就是所要論證其存在者也。(參見中間值定理的證明)。其所用到的是極限和被夾逼於其間者的存在性 (這裡就用到直線連續性的解析描述!)

(三) 變率與微分、求和與積分: “變率” 與 “求和” 是函數的兩種定量型 (quantitative) 的基本性質。但是它們的定義本身就是理論的起點, 有如當年 Eudoxus 所要研究的不可公度比。同學們要在理解微積分上有一個好的開始的好方法就是在 “變率” 與 “求和” 的基礎論上師法 Eudoxus, 先行明確比較原則, 然後以已知上、下夾逼未知, 從而明確有待定義者。

(四) 函數的連續性和連續函數的基本性質: 分析學乃是變量數學 (mathematics of variables), 它是用來定量地研討變動事物的數學。在大自然中常見常用的變動事物中, 逐漸的連續變動乃是常態, 而不連續的突變則往往是某些不常發生突發事件。由此可見, 描述連續變動的連續函數當然是分析學所要研究的主角; 而連續函數的基本性質, 例如閉線段上的連續函數的極大、極小值的存在性, 均勻連續性, 在整個分析學上也自然具有基本的重要性。顯然, 在它們的證明中, 又必然要用到直線連續性的解析描述。其實, 同學們應該試著用自己想法去證明它們, 乃是更好體會“理在用中方知妙”的好機會。

(五) 微分、積分運算律和微積分基本定理: 在概念上, 我們要師法 Eudoxus, 由比較原則和上、下夾逼去明確 “變率” (rate of change) 和 “總和” (sum of total effect) 的定義, 然後再把它們分別轉化爲微分與積分運算。在本質上, 微分乃是逐點有系統的局部線性化, 而積分則是分割求和的藝術。它們各有一套運算律而且又有微積分基本定理把兩者緊密相聯, 構成數理分析的基本體系, 簡稱之爲微積分, 是進而理解連續世界的基本功!

《 2007 年秋于淡江大學的講稿 》

參考文獻

1. 項武義, 基礎幾何學, 基礎代數學, 基礎分析學之一, 之二, 北京人民教育出版社, 2004, 台北九章出版社代理。

—本文作者爲美國柏克萊大學退休教授—