誤　解　辨　正

王湘君

一、絶對不等式

試 $x>0$, $f(x)=18x+\frac{2}{x}$, $g(x)=x+\frac{1}{x}$，試問下列敍述，何者眞?

(A) $f(x)$ 之極小值爲 12

(B) $g(x)$ 之極小值爲 2

(C) $f(x)\cdot g(x)$ 之極小值爲 24

(D) $f(x)+g(x)$ 之極小值爲 14

(E) $f(x)-g(x)$ 之極小值爲 10

【誤解】 (A), (B), (C), (D), (E)

①$f(x)=18x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{18x\cdot\frac{2}{x}}=2\cdot 6=12$，故 $f(x)$ 之極小值爲12

②$g(x)=x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，故 $g(x)$ 之極小值爲2

③$f(x)\cdot g(x)\geq 12\cdot 2=24$，故 $f(x)\cdot g(x)$ 之極小值爲24

④$f(x)+g(x)\geq 12+2=14$，故 $f(x)+g(x)$ 之極小值爲 14

⑤$f(x)-g(x)\geq 12-2=10$，故 $f(x)-g(x)$ 之極小值爲 10

【正解】 (A), (B)

①同上

②同上

③$f(x)\cdot g(x)=(18x+\frac{2}{x})(x+\frac{1}{x})=18x^2+\frac{2}{x^2}+20$

$$\geq 2\sqrt{18\cdot 2}+20=32$$

故 $f(x)\cdot g(x)$ 之極小值爲 32

④$f(x)+g(x)=\left(18x+\frac{2}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$$=19x+\frac{3}{x}\geq 2\sqrt{19\cdot 3}=2\sqrt{57}$$

故 $f(x)+g(x)$ 之極小値爲 $2\sqrt{57}$

⑤$f(x)-g(x)=\left(18x+\frac{2}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$$=17x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{17}$$

故 $f(x)-g(x)$ 之極小値爲 $2\sqrt{17}$

【說明】

①$x, y>0$，若 $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$，則 $x=y\Longleftrightarrow$ 等號成立

②誤解中，

$18x+\frac{2}{x}\geq 12$　等號成立時，$18x=\frac{2}{x}$……①

$x+\frac{1}{x}\geq 2$，等號成立時　$x=\frac{1}{x}$……②

①、②兩式矛盾，故在同一子題裏，不能同時成立

二、根式不等式

求解無理不等式　$x+2>\sqrt{10-x^2}$

【誤解】

①$10-x^2\geq 0\Longrightarrow |x|\leq\sqrt{10}$

②$(x+2)^2>10-x^2\Longrightarrow x^2+2x-3>0$

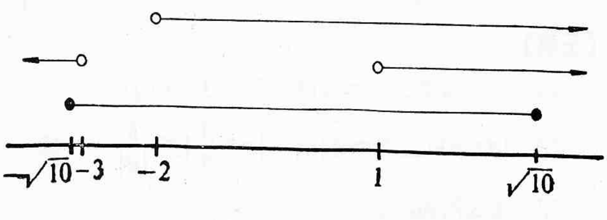
$\Longrightarrow(x+3)(x-1)>0$

$\Longrightarrow x>1$ 或 $x<-3$

故解爲　$-\sqrt{10}\leq x<-3$　或　$1<x\leq\sqrt{10}$

【正解】

①$10-x^2\geq 0$　②$(x+2)^2>10-x^2$　③$x+2>0$



由①②③得解爲　$1>x\leq\sqrt{10}$

【說明】

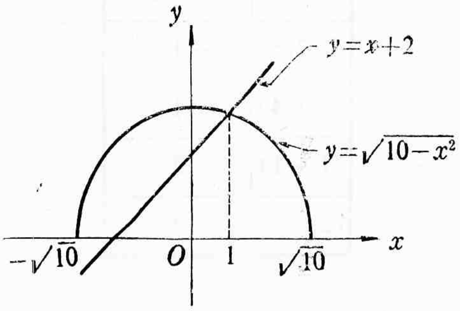
今以圖解法來說明其解，先作二圖形

$$y=x+2\qquad y=\sqrt{10-x^2}$$

求解　$x+2>\sqrt{10-x^2}$，也就是找出 x 在那個範圍裏。

直線　$y=x+2$ 在半圓　$y=\sqrt{10-x^2}$　的上方

$y=x+2$ 與 $y=\sqrt{10-x^2}$ 之圖形相交於 $x=1$ 處(何故？)



由觀察圖形，可知所求之解應　$1<x\leq\sqrt{10}$

三、一元一式不等式

設 $f(x)=ax+b$，若 $0<f(1)<3$，$1<f(2)<2$ 求 a,b 及 $f(3)$ 之範圍。

【誤解】

$$\begin{cases}0<f(1)<3\\1<f(2)<2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}0<a+b<3\cdots\cdots①\\1<2a+b<2\cdots\cdots②\end{cases}$$

②−①得　　$-2<a<2$……③

①−③得　　$-2<b<5$……④

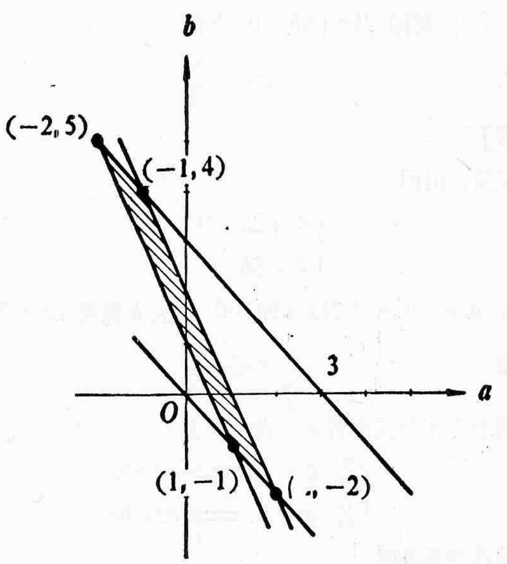
由③　　$-6<3a<6$……⑤

④+⑤　　$-8<3a+b<11$ 卽 $-8<f(3)<11$

【正解】

a,b 範圍同上。欲求 $f(3)$ 範圍，先圖示

$$\begin{cases}0<a+b<3\\1<2a+b<2\end{cases}$$



斜線部分卽爲其圖形，依線性計劃知 $f(3)=3a+b$ 之最大、最小値必存在於圖形之端點。今計算

	$3a+b$
(-2.5)	-1
$(-1,4)$	1
$(1,-1)$	2
$(2,-2)$	4

故 $\quad -1<3a+b<4$

【另解】

$f(3)=3a+b=2f(2)-f(1)$ 得 $-1<f(3)<4$

【說明】

欲求 $f(3)$ 之範圍，不可由

$$\begin{cases}-2<a<2\\-2<b<5\end{cases}$$

求得 $-8<3a+b<11$ 因爲此步驟不可逆。

四、一元一次方程式

$a,b\in \boldsymbol{R}$ 已知 $(a+2b)x+(3a-b)<0$ 之解爲 $x>-2$ 求 $(a-3b)x+(2a-b)>0$ 之解

【誤解】

已知 $(a+2b)x+(3a-b)<0$ 之解爲 $x>-2$

得知 $a+2b<0$。原式與 $x>\dfrac{-3a+b}{a+2b}$ 同義

故 $\dfrac{-3a+b}{a+2b}=-2$，$\therefore a=5b$ (a,b 同號)

又 $a+2b<0$ 故 a,b 皆負。所求 $(a-3b)x+(2a-b)>0$ 之解即 $2bx+9b>0$ 之解

$\therefore \quad x<-\dfrac{9}{2}$

【正解】

同前，但因

$$\begin{cases}a+2b<0\\a=5b\end{cases}$$

知 $a,b<0$ 所以 $2bx+9b>0$ 消去 b 應爲 $2x+9<0$

故 $\quad x<-\dfrac{9}{2}$

【說明】在不等式性質中，設 $a>b$

$$\begin{cases}若\ c<0 \Longrightarrow ac>bc\\若\ c<0 \Longrightarrow ac<bc\end{cases}$$

除法運算亦然。

五、二次方程式（根之性質）

設方程式 $x^2-2(m-4)x+2m=0$ 的二根均爲大於 2 之相異實數，求 m 之範圍。

【誤解】

①$\Delta=(m-4)^2-2m>0 \Longrightarrow m>8$ 或 $m<2$

②二根之和 $>4 \Longrightarrow 2(m-4)>4 \Longrightarrow m>6$

③二根之積 $>4 \Longrightarrow 2m>4 \Longrightarrow m>2$

由①②③得 $m>8$

【正解】

設此方程式二根爲 α,β.

①$\Delta>0 \Longrightarrow m>8$ 或 $m<2$

②$(\alpha-2)+(\beta-2)>0 \Longrightarrow m>6$

③$(\alpha-2)(\beta-2)>0 \Longrightarrow \alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4>0$
$\Longrightarrow 2m-4(m-4)+4>0 \Longrightarrow m<10$

由①②③得 $8<m<10$

【說明】

①二根 α,β 均大於 2，若寫爲 $\alpha+\beta>4$，$\alpha\beta>4$，$\alpha\beta>4$ 兩根可能爲 1, 5

②二根 $\alpha.\beta$ 均大於 2，必須 $(\alpha-2)+(\beta-2)>0$ 且 $(\alpha-2)(\beta-2)>0$

六、含絶對值符號之不等式

若 $|ax+1|\le b$ 之解爲 $-1\le x\le 5$，求 a,b 之值。

【誤解】

$|ax+1|\le b \Longrightarrow -b\le ax+1\le b$

$\Longrightarrow \dfrac{-b-1}{a}\le x\le \dfrac{b-1}{a}$

又因 $-1\le x\le 5$ 故

$$\begin{cases}\dfrac{-b-1}{a}=-1\\[2mm]\dfrac{b-1}{a}=5\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\[2mm]b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

【正解】

$\therefore \quad -1\le x\le 5 \Longrightarrow |x-2|\le 3 \cdots\cdots$①

$\because \quad |ax+1|\le b \Longrightarrow |a|\cdot|x+\dfrac{1}{a}|\le \dfrac{b}{|a|} \cdots\cdots$②

$\because$ ①②同義，故

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}=-2\\[2mm]\dfrac{b}{|a|}=3\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\[2mm]b=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

【說明】

①在誤解中，由

$-b-1\le ax\le b-1$

$\Longrightarrow (-b-1)/a\le x\le (b-1)/a$

此一步驟是錯誤的，因爲尚不知 a 之正負，可能

$$-b-1 \leq ax \leq b-1$$

$$\Longrightarrow \frac{-b-1}{a} \geq x \geq \frac{b-1}{a}$$

②誤解可如下修正 $-b-1 \leq ax \leq b-1$

(i)若 $a>0$，則 $\frac{-b-1}{a} \leq x \leq \frac{b-1}{a}$

得 $\begin{cases} \frac{-b-1}{a}=-1 \\ \frac{b-1}{a}=5 \end{cases}$，$a=-\frac{1}{2}$（不合）

(ii)若 $a<0$，則 $\frac{-b-1}{a} \geq x \geq \frac{b-1}{a}$

得 $\begin{cases} \frac{-b-1}{a}=5 \\ \frac{b-1}{a}=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$

七、無理方程式

方程式 $\sqrt{2x^2-x-2}-\sqrt{x^2-x-1}=x+1$ 的實根有幾個?

【誤解】

$\sqrt{2x^2-x-2}-\sqrt{x^2-x-1}=x+1$ ……①

$(2x^2-x-2)-(x^2-x-1)=x^2-1$ ……②

$\frac{②}{①}$ $\sqrt{2x^2-x-2}+\sqrt{x^2-x-1}=x-1$ ……③

$\frac{①-③}{2}$ $-\sqrt{x^2-x-1}=1$（不合）

故此方程式沒有實根

【正解】

$\sqrt{2x^2-x-2}-\sqrt{x^2-x-1}=x+1$ ……①

$(2x^2-x-2)-(x^2-x-1)=x^2-1$ ……②

此時應考慮 $x+1=0$ 以及 $x+1\neq 0$

(i) $x+1=0$，即 $x=-1$ 時，恰滿足方程式，故方程式有一實根 -1

(ii) $x+1\neq 0$ 時，同誤解中，造成 $-\sqrt{x^2-x-1}=1$ 矛盾

故此方程式有一實根爲 -1

【說明】在除法運算中，要先確定除式不爲0，才能運算。

八、三元聯立方程組

解聯立方程組 $\begin{cases} yz=y+2z \\ zx=3z-2x \\ xy=4x-5y \end{cases}$

【誤解】

$$\begin{cases} yz=y+2z \\ zx=3z-2x \\ xy=4x-5y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{z}+\frac{2}{y}=1 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{z}=1 \\ \frac{4}{y}-\frac{5}{x}=1 \end{cases}$$

由加減消去法，可得解

$$x=4,\quad y=16/9,\quad z=-8.$$

【正解】

① $x,y,z=0$ 時，滿足方程組，故此方程組有一解 $(0,0,0)$.

② $xyz\neq 0$ 以下同「誤解」.

故 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 或 $(4,\frac{16}{9},-8)$ 共兩組解.

【說明】

同第七題。

九、方程式的解

設 $k\in R$，若含 x 之方程式 $(k+3)x^2-4x+2k-1=0$ 恰有一解，求 k 之值。

【誤解】

∵ 方程式恰有一解 ∴ 判別式 $\triangle=0$

$$\triangle=(2k)^2-(k+3)(2k-1)=0$$

解得 $k=\frac{3}{2}$ 或 1

【正解】

① $k+3=0$，即 $k=-3$ 時，$x=7/12$（此時方程式恰有一解 $7/12$）

② $k+3\neq 0$ 時

$$\triangle=(2k)^2-(k+3)(2k-1)=0$$

解得 $k=\frac{3}{2}$ 或 1

故 k 之值有三，$-3, \frac{3}{2}, 1$

【說明】

方程式「恰有一解」與「有二相等實根」是有區別的，方程式恰有一解，可能係指一次方程式。

而方程式僅有二相等實根，必定指二次方程式。故 x^2 之係數不能爲0，且判別式爲0.

十、二次方程式

設二次方程式 $(a+3)x^2-4x+a=0$ 有二相異實根，求 a 之整數值。

【誤解】

∵ 以二次方程式，有二相異實根，故判別式 $\triangle>0$

$$\triangle = 4-a(a+3)>0$$
$$\Longrightarrow a^2+3a-4<0$$
$$\Longrightarrow (a+4)(a-1)<0$$
$$\Longrightarrow -4<a<1$$

故 a 之整數值為 $-3,-2,-1,0$ 共四個。

【正解】

二次方程式，必須 x^2 之係數不為0

$\therefore\ a+3\neq 0$ ……①

又有二相異實根 $\Longrightarrow\ \triangle=4-a(a+3)>0$

$\Longrightarrow\ -4<a<1$ ……②

由①② $\therefore$ a 之整數值有三，$-2,-1,0.$

【說明】

在題意中，已指出方程式為二次，必須注意 x^2 之係數不為0。

十一、有理函數的極值

求有理函數 $f(x)=2/(x^2-1)$ 的極大、極小值。

【誤解】

令 $2/(x^2-1)=k$，去分母得，$kx^2-k=2$

$\Longrightarrow\ x^2=(k+2)/k\geq 0\quad\therefore\ k(k+2)\geq 0$

$k\geq 0$ 或 $k\leq -2$

故 $f(x)=2/(x^2-1)$ 之極大值為 -2，極小值為 0。

【正解】

$\because\ f(x)=2/(x^2-1)$，分母為定數2，故 $2/(x^2-1)\neq 0$ $\forall x\in \boldsymbol{R}$。故原函數僅有極大值 -2，而沒有極小值。

【說明】:

分式函數 $f(x)=2/(x^2-1)$ 分母不可為0

當 $x\longrightarrow\pm 1$ 時，$f(x)\longrightarrow\pm\infty$

當 $x\longrightarrow\pm\infty$ 時，$f(x)\longrightarrow 0$

十二、三角方程式

設 $0<x<2\pi$ 求方程式 $\log_{\sin x}{}^{\cos x}+\log_{\cos x}{}^{\tan x}=1$

【誤解】

$$\log_{\sin x}{}^{\cos x}+\log_{\cos x}{}^{\tan x}=1$$

換底
$$\frac{\log^{\cos x}}{\log^{\sin x}}+\frac{\log^{\sin x}-\log^{\cos x}}{\log^{\cos x}}=1$$
$$\frac{\log^{\cos x}}{\log^{\sin x}}+\frac{\log^{\sin x}}{\log^{\cos x}}-1=1$$

令 $y=\dfrac{\log^{\cos x}}{\log^{\sin x}}\Longrightarrow y+\dfrac{1}{y}-2=0$

$\Longrightarrow y^2-2y+1=0$，$y=1$ 即 $\log^{\cos x}=\log^{\sin x}$

$\Longrightarrow \cos x=\sin x\Longrightarrow \tan x=1$

$\therefore\ 0<x<2\pi\quad\therefore\ x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}$

【正解】

同〔誤解〕，但 $x=5\pi/4$

$\because\ \sin\dfrac{5\pi}{4}=\cos\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

使 $\log_{\sin x}\cos x$ 以及 $\log_{\cos x}\tan x$ 無意義

【說明】

對數函數 $y=\log_a x$ 中，必須 $0<a\neq 1$ 且 $x>0$ 方有意義。

十三、複數的極式

複數 $z=-1+it\ (t>0)$，數列 $z,z^2,z^3,\cdots\cdots,z^n\cdots\cdots$，最初實數項為 z^{12} 求 z 之主幅角。

【誤解】

$z=-1+it(t>0)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta$ 在第 II 象限內。

$z^{12}=r^{12}(\cos 12\theta+i\sin 12\theta)$ 為實數。

則 $\sin 12\theta=0\Longrightarrow 12\theta=n\pi.\quad \theta=\dfrac{n\pi}{12}$

$\because\ \theta$ 在第 II 象限內

$\therefore\ \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{n\pi}{12}<\pi\qquad\therefore\ 6<n<12$

$$\theta=\frac{7\pi}{12},\ \frac{8\pi}{12},\ \frac{9\pi}{12},\ \frac{10\pi}{12},\ \frac{11\pi}{12}$$

【正解】

解法同〔誤解〕

唯 $\theta=8\pi/12=2\pi/3$ 或 $\theta=9\pi/12=3\pi/4$ 或 $\theta=10\pi/12=5\pi/6$ 時，雖然 z^{12} 為實數，但不為最初的實數項，故

$$\theta=\frac{7\pi}{12}\ \text{或}\ \frac{11\pi}{12}$$

【說明】

當 $\theta=8\pi/12=2\pi/3$ 時 $z^3=r^3\in\boldsymbol{R}$，且 z^3,z^6,z^9,z^{12}，……亦為實數。故 z^{12} 不為最初的實數項

同理 $\theta=\dfrac{9\pi}{12}$ 或 $\dfrac{10\pi}{12}$ 時，z^{12} 亦不為最初的實數項。

——本文作者為師大附中數學教師