# 截痕之研究

賴敦生

## 一、前言

此處所提的"截痕"是指一錐面與一平面的交集圖形。現行部定教科書或一般數學專業參考圖書對於"截痕"之解釋，除高中實驗教本第四册第二章有一段冗長難以接受的敍述外，其餘均以指定之態度述說截痕就是錐線，沒有證明。

本文之用意就是對"截痕"之簡捷證實。爲着配合自然的學習心理，本文亦對宇宙現況，機械製圖也提了一些，以使理論與實際一致，符合邏輯。

## 二、錐線之定義

我們先對錐線下定義，然後依定義來證實截痕，這才合理。

**橢圓之定義:**

設 $F_1, F_2$ 是坐標平面上相異兩點，長度 $2a > F_1F_2$，則坐標平面上的點集 $\{P \mid PF_1 + PF_2 = 2a\}$ 稱爲一橢圓，其中 $F_1$ 與 $F_2$ 稱爲這個橢圓的焦點，$PF_1, PF_2$ 又叫焦半徑， 而 $F_1F_2$ 之中點定名爲橢圓之中心。

我們由此選定一坐標系使 $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$，用記號 $\Gamma$ 表這橢圓，則當 $P(x, y) \in \Gamma$ 時

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$
$$(\because PF_1+PF_2=2a)$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

取 $b^2=a^2-c^2$，則 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （這就是橢圓方程式）

今依下款探討橢圓的形狀:

(1)對稱情形: 對稱於 $x$ 軸，$y$ 軸，原點。（說明略）

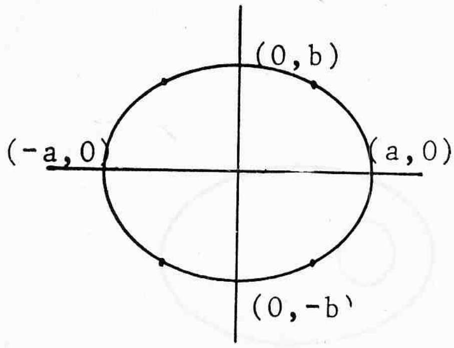
(2)範圍: $-a \le x \le a$，$-b \le y \le b$（說明略）

(3)截點: 在 $x$ 軸之截點 $(\pm a, 0)$，（長軸端點）在 $y$ 軸截點 $(0, \pm b)$（短軸端點）

(4)描點:

| $x$ | $-a$ | $-\frac{a}{2}$ | $0$ | $\frac{a}{2}$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}b$ | $\pm b$ | $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}b$ | $0$ |

(5)圖形:




* **推廣**: 中心 $(h,k)$, 長短軸長分爲 $2a,2b$, 而長軸平行於 $x$ 軸, 則橢圓方程式必爲

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^3}=1$$

**錐線的定義:**

設 $L$ 是坐標平面上的一已知直線, $F\notin L$ 是一已知點, 實數 $e>0$, 用 $P_L$ 表 $P$ 到直線 $L$ 之距離, 則坐標平面上的點集 $\{P|PF=e\cdot P_L\}$ 稱爲圓錐曲線, 簡稱錐線, $L$ 與 $F$ 分別稱爲這錐線的準線與焦點, $e$ 稱爲離心率。

若取一坐標系使 $F(c,0)$, $c\neq 0$, 用 $\Gamma$ 表這錐線, 當 $P(x,y)\in\Gamma$ 時,

$$\Longleftrightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}=e|x|$$

$$\Longleftrightarrow(1-e^2)x^2-2cx+y^2+c^2=0$$

取 $0<e<1$

$$\Longleftrightarrow(1-e^2)\left(x-\frac{c}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{e^2c^2}{1-e^2}$$

表示一橢圓之方程式。

**註**: ①離心率 $e=1$ 表拋物線, $e>1$ 表雙曲線論述略

②退化的情形本文暫不討論。(爲使本文簡捷)

以上二款使我們了解錐線之定義, 方程式, 圖形的形狀, 以這個基礎作爲對截痕證實的依據。(爲的是符合邏輯)

# 三、實際世界的圓錐曲線

我們研談數學, 最好是能應用於日常生活中, 或者從數學了解自然現象的道理, 倘能有這種優點, 我們便不覺得數學枯燥。既已了解圓錐曲線, 到底有助於我們對自然現象的了解嗎? 在這節中, 我們要把錐線配合實際世界, 作一介紹, 以利了解。

## 甲、宇宙現況

天文學家已經發現了下列的事實。(但這些並非我們肉眼所可以看得出的)。

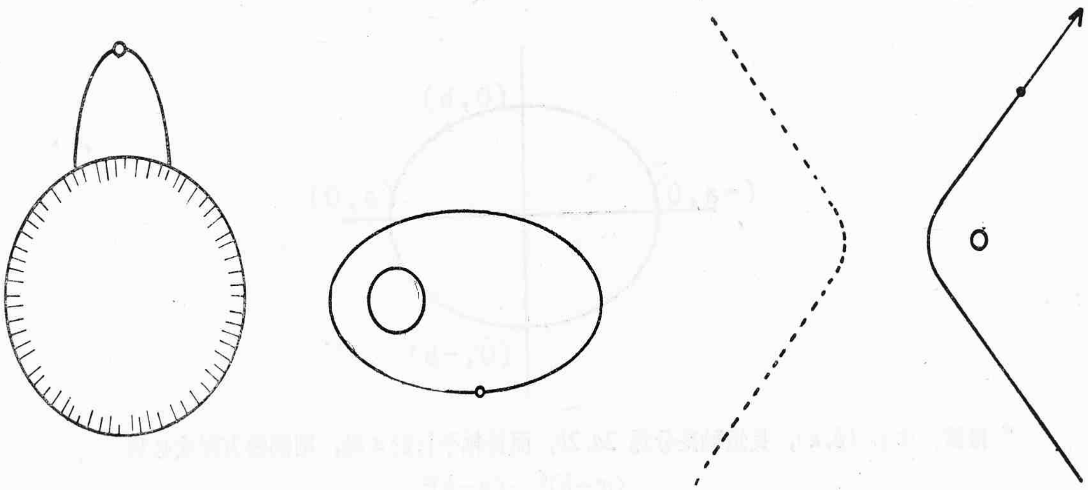
(1)天體運行若爲週而復始者，其軌道爲一橢圓。（天文學家 Kepler 發現）。

(2)天體運行非週而復始者，其軌道就是双曲線。如慧星運行就是以太陽爲焦點之双曲線。

(3)如在地球表面發射人造衞星：

由於火箭能量因素，衞星軌道有：抛物線、橢圓、及雙曲線的一部分。

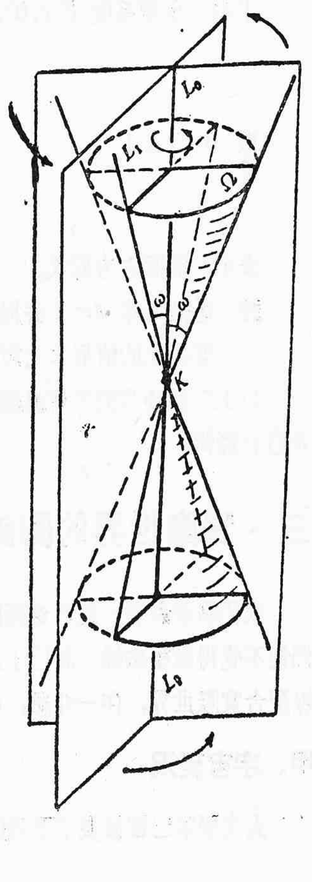
其圖形可能如下：



用這些事實提起我們對數學的興趣，從此理論與實際配合，心理上不再孤單，也因此我們學數學的目的在觀念上，不會只有“爲升學而學數學”了。

## 乙、實體世界

我相信大家對“錐線”的體會仍嫌不足，因爲那只是天文上的，肉眼看不出，也許有虛構的可能，將信將疑。下面我再舉出一些「模型」裨使大家對錐線有進一步的認識。




(1)**圓錐面**

在空間中取定一平面及其上兩條交於一點 $K$ 之直線 $L_0$ 及 $L_1$，然後以 $L_0$ 爲軸，將平面迴轉，此時另一直線 $L_1$，掃出一個錐狀的曲面，這種曲面便稱爲圓錐面。（以 $\Omega$ 代之）。

(i)頂點：$K$

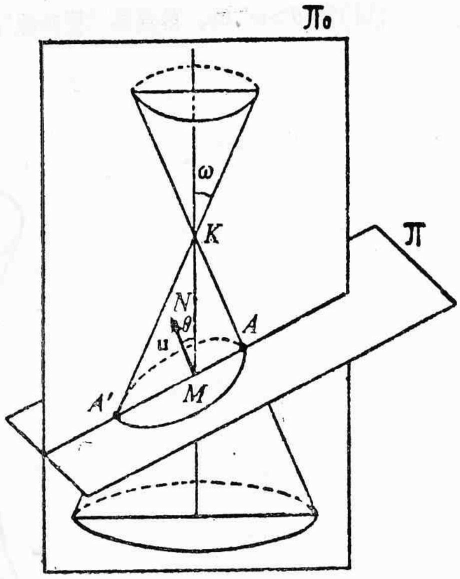
(ii)中心軸：$L_0$

(iii)母線：迴轉的 $L_1$，在任一時刻的位置是一條 $\Omega$ 上的直線

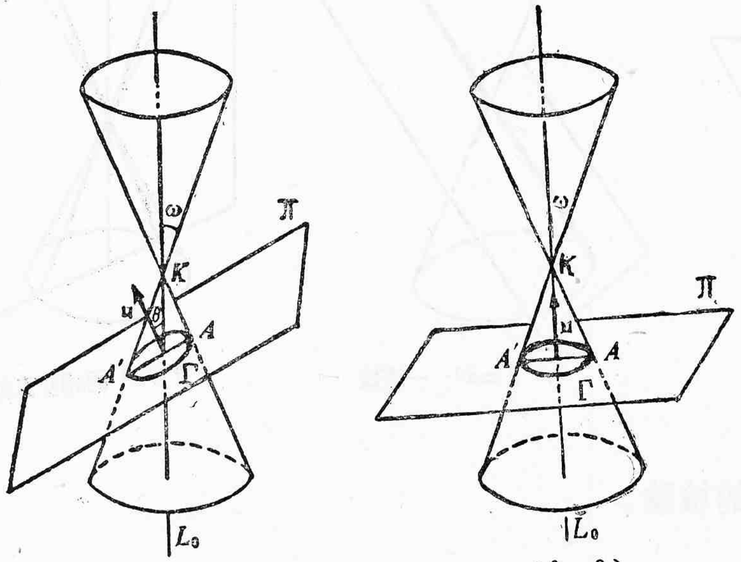
(iv)頂角：$L_0$ 與 $L_1$ 之交角（定值）以 $\omega$ 代之

(2)**圓錐曲線**（錐線）：即平面 $\pi$ 與 $\Omega$ 之截痕，設 $\Omega$ 爲一以 $K$ 爲頂點的圓錐，而一個不含 $K$ 的平面 $\pi$ 與 $\Omega$ 的截痕，稱爲圓錐曲線，簡稱錐線。

* 當平面 $\pi$ 與中心軸 $L_0$。交於一點 $M$ 時，取 $\pi$ 的一個單位法向量 $u=\overrightarrow{MN}$ 使 $N$ 與 $K$ 在 $\pi$ 的同側。取一平面 $\pi_0$ 含 $L_0$ 與 $MN$，在 $\pi_0$ 上規定一轉角的方向，定 $\angle KMN=\theta$ 爲 $\pi$ 在 $\Omega$ 上的截角。當 $\pi$ 不與 $L_0$ 交於一點時，定義截角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，今取 $\omega'=\frac{\pi}{2}-\omega$

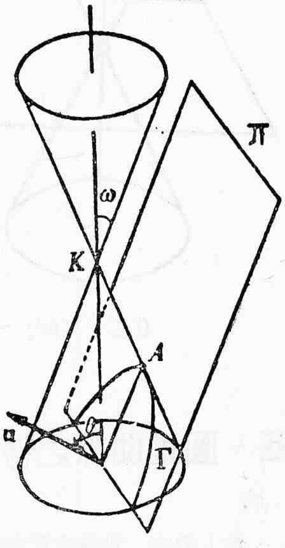



(i)當 $0\leq\theta<\omega$ 時，截痕爲"橢圓"或"正圓"（當 $\theta=0$）
(ii)當 $\theta=\omega'$ 時，截痕爲"拋物線"



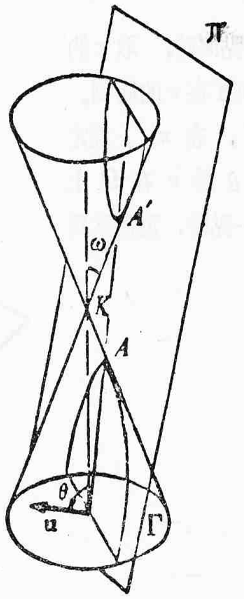

$(\theta=0)$

$0\leqq\theta<\omega'$ 形似橢圓（包括正圓的情形）

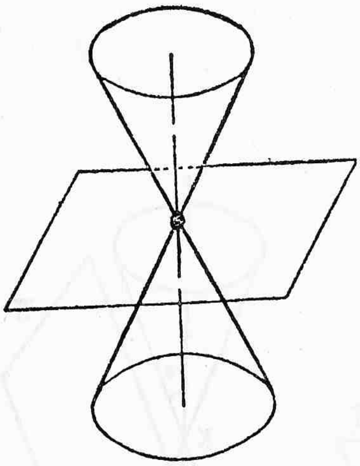



$\theta=\omega'$ 形似拋物線

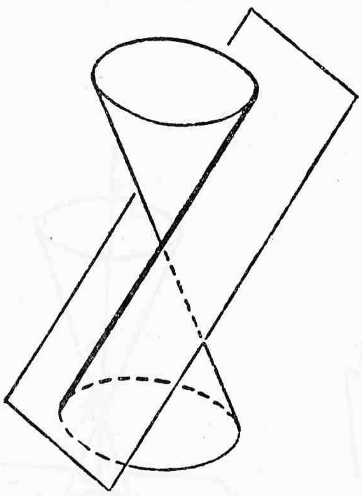
(iii)當 $\theta>\omega'$ 時，截痕爲"雙曲線"，若$\pi$經過頂點$K$時，則截痕依次爲點、直線、二相交直線



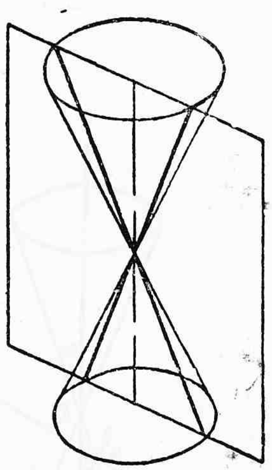

$\theta>\omega'$ 形似雙曲線



$0\leq\theta<\omega'$: 一點



$\theta=\omega'$: 一直線



$\theta>\omega'$ 兩相交直線

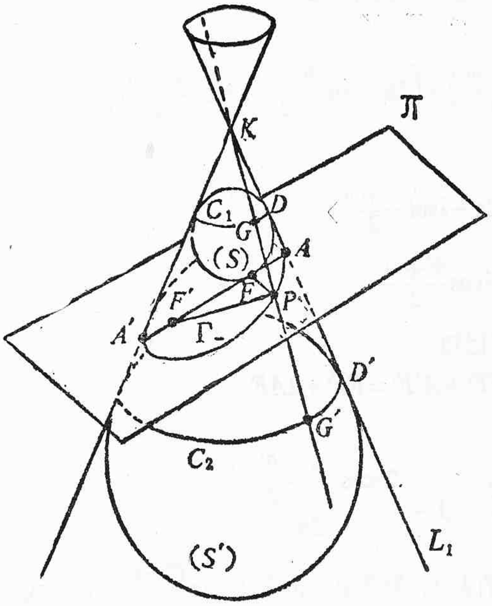
## 四、圓錐曲線之特質的檢驗

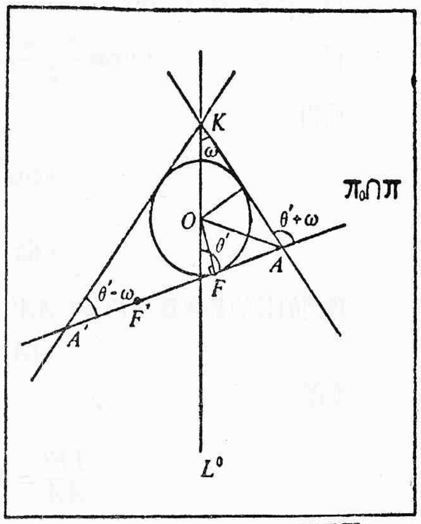
在上款中，我截然肯定截痕有橢圓、雙曲線、拋物線，當然大家不太相信，因爲上述三種曲線，均有它的特質（定義中所描述的條件）。我們一定要截痕也具有此特質，才能同意上款的看法。（這就是本文的旨意）

### 甲、由焦半徑驗證錐線的特質

在未驗證前，讓我們來研究部定高中實驗教本，對於這個問題的看法；原載實驗本第四冊第二章 P.90，證明

$e=\frac{FF'}{AA'}=\frac{\cos\theta'}{\cos\omega}=\frac{\sin\theta}{\sin\omega'}=$定數　其圖形如下:




平面 $\pi_0$

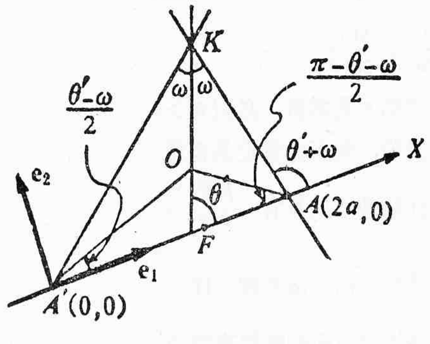
**證明**　在平面 $\pi_0$ 上取一正交座標系 $(A';e_1,e_2)$ 使原點爲

$A'=A'(0,0)$

且　$e_1=A'A/A'A'$

則　$A=A(2a,0)$

其中　$A'A=2a$




今　$AO$ 之矢角$=\pi-\frac{1}{2}(\angle KAA')$

$$=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\theta'-\omega)=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta'+\omega}{2}$$

而　$A'O$ 之矢角$=\frac{1}{2}(\angle AA'K)=\frac{\theta'-\omega}{2}$

設 $\lambda=AO,\ \mu=A'O$

則

$$\overrightarrow{AO}=\left(\lambda\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta'+\omega}{2}\right),\ \lambda\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta'+\omega}{2}\right)\right)$$

$$=\left(-\lambda\sin\frac{\theta'+\omega}{2},\ \lambda\cos\frac{\theta'+\omega}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{A'O}=\left(\mu\cos\frac{\theta'-\omega}{2},\ \mu\sin\frac{\theta'-\omega}{2}\right)$$

其中$\lambda$及$\mu$爲兩待定實數。按照常用的以向量求交點的方法。

由　$\overrightarrow{A'O}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AO}$

得
$$\left(\mu\cos\frac{\theta'-\omega}{2},\ \mu\sin\left(\frac{\theta'-\omega}{2}\right)\right)=\left(2a-\lambda\sin\frac{\theta'+\omega}{2},\ \lambda\cos\frac{\theta'+\omega}{2}\right)$$

而得

$$\mu\cos\frac{\theta'-\omega}{2}=2a-\lambda\sin\frac{\theta'+\omega}{2}$$

$$\mu\sin\frac{\theta'-\omega}{2}=\lambda\cos\frac{\theta'+\omega}{2}$$

我們的目的是要算 $FF'$ 與 $AA'$ 的比，但已知

$$AA'=AF+FF'+A'F'=FF'+2AF$$

亦卽

$$\frac{FF'}{AA'}=1-\frac{2AF}{AA'}=1-\frac{2\lambda\cos\dfrac{\pi-\theta'-\omega}{2}}{2a}$$

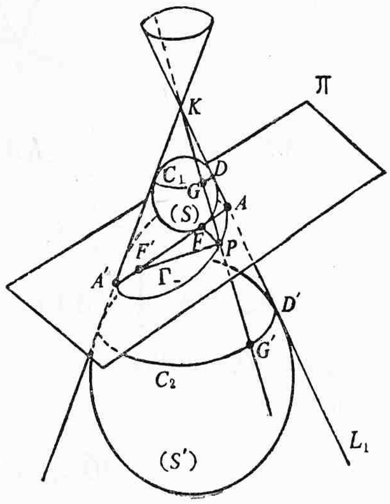
故只須從上面聯立方程式求解$\lambda$卽可，爲消去$\mu$，將其第一式乘以 $\sin\frac{\theta'-\omega}{2}$，第二式乘以 $\cos\frac{\theta'-\omega}{2}$，再相減得　$0=2a\sin\frac{\theta'-\omega}{2}-\lambda\cos\omega$〔利用和角公式〕

故　$$\lambda=\frac{2a\sin\dfrac{\theta'-\omega}{2}}{\cos\omega}$$

而　$$\frac{FF'}{AA'}=1-\frac{2\lambda\sin\dfrac{\theta'+\omega}{2}}{2a}=1-\frac{\cos\omega-\cos\theta'}{\cos\omega}$$

$$=\frac{\cos\theta'}{\cos\omega}=\frac{\sin\theta}{\sin\omega'}$$

實驗本證明至此，只能證明$e$是常數，必對$e>1$，$e=1$，$e<1$分類討論，尙不能肯定是否爲錐線，而只能說是凡是此類截痕均具有 $\frac{FF'}{AA'}=\frac{\sin\theta}{\sin\omega'}$ 之特質，那麼圖形爲何？沒有辦法作一完善的交代。至於其他關於這方面的數學專門圖書均未提起!!




今我提出這樣的述論:

①驗證橢圓的特質:

從圖形中我們假設

(1)球 $S.S'$ 與圓錐相切（在$K$之同側）

(2)二球與圓錐交集均爲一圓周。

(3)平面$\pi$與兩球相切，切點$F$，$F'$。

(4)$\Omega$ 與$\pi$之交集爲錐線$\Gamma$。

(5)$P$在$\Gamma$上，∵$PF=PG$　$PF'=PG'$（切線等長）

$\therefore$ $PF+PF'=PG+PG'=GG'$（定長——在母線上之一線段）

(6)$FF'$ 延長線與$\Gamma$之交點爲 $A, A'$。

$\because$ (5)中之$P$可爲 $A, A'$

$\therefore$ $AF+AF'=A'F+A'F'=$定長$=GG'$

$\therefore$ $AF+(AF+FF')=(A'F'+FF')+A'F'$

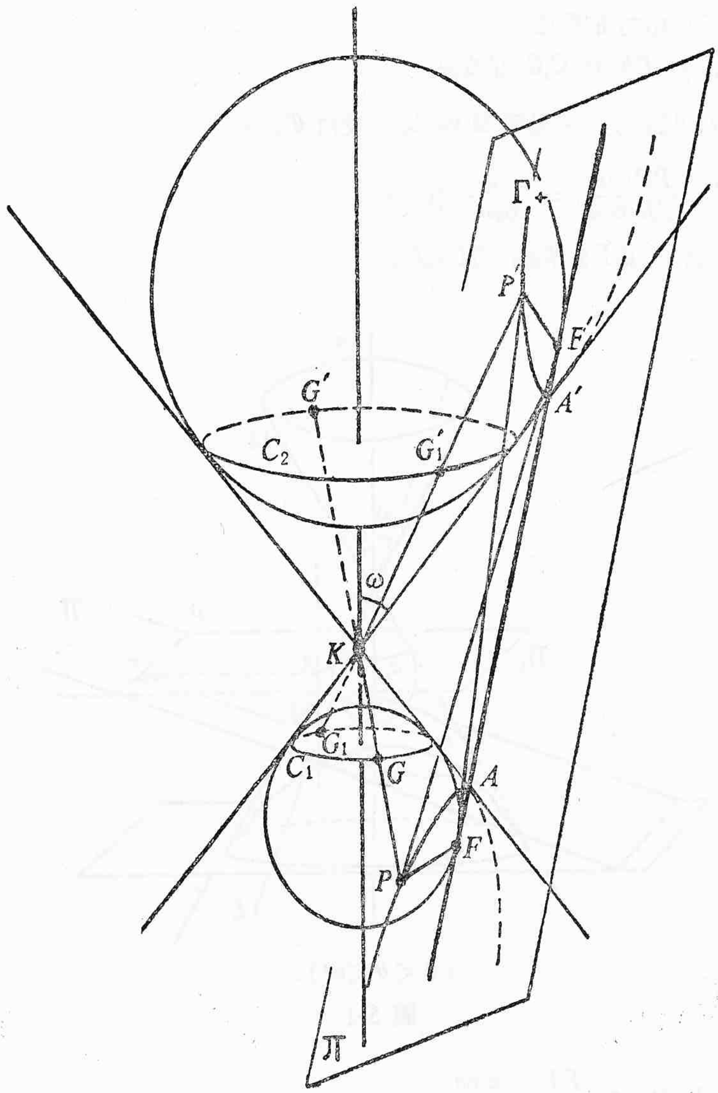
$\therefore$ $AF=A'F'$

(7)$PF+PF'=AF+AF'+AF+(AF+FF')$

$=AF+FF'+A'F'=AA'$（長軸長）

$\therefore$驗證出截痕$\Gamma$上的點$P$至兩定點 $FF'$ 之距離和等於定長 $AA'$ 而$\Gamma$確實爲橢圓。

②**驗證雙曲線的特質**




(1)二球分在$K$之兩側，與 $\Omega$ 相切

(2)$\pi$平面與兩球切點 $FF'$，與 $\Omega$ 之截痕 $\Gamma_+$。

(3)設$P$爲 $\Gamma_+$ 上任一點，$PF'=PG', PF=PG$（切線等長）

$\therefore$ $PF'-PF=PG'-PG=GG'$（定長）（母線上的一線段）

(4)$PF'-PF=AF'-AF=A'F-A'F'=$定長

$=AA'+A'F-AF=A'A+A'F'-AF$

$=AA'$（貫軸長）（$AF=A'F'$ 同上款①可獲證）

$\therefore$ 驗證出截痕 $\Gamma_+$ 上的點$P$至二定點 $F,F'$ 之距離差爲定長 $AA'$ 而 $\Gamma_+$ 確實爲雙曲線。

## 乙、由準線觀點的檢驗

①驗證橢圓

(1)$\Gamma$：平面$\pi$與圓錐面 $\Omega$ 的截痕。

(2)$F,F'$ 是內切球 $S,S'$，與$\pi$的切點。

(3)$\pi_1,\pi_2$ 各爲含 $C_1,C_2$ 之平面，與平面$\pi$之交線 $\rho,\rho'$（就是準線）。

(4)$C_1,C_2$ 各爲$S$及 $S'$ 與 $\Omega$ 的切圓。

(5)設$P$爲$\Gamma$上一點，$T,T'$ 各爲$P$點至 $\rho,\rho'$，的垂足。

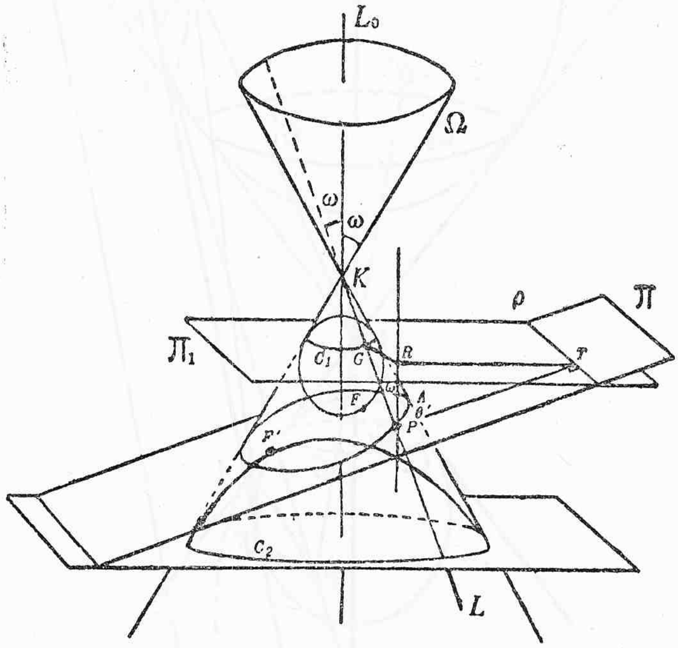
(6)$R,R'$ 是 至 $\pi_1.\pi_2$ 的垂足。

(7)$C,C'$ 各爲母線 $PK$ 與 $C_1C_2$ 的交點。

(8)$\theta'=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\theta$爲$\pi$之法向量與 $\Omega$ 軸 $L_0$ 之交角 $\theta'>\omega$

(9)$\dfrac{PF}{PT}=\dfrac{PG}{PT}=\dfrac{PR/\cos\omega}{PR/\cos\theta'}=\dfrac{\cos\theta'}{\cos\omega}=$定數$<1$

至 肯定$\rho$及 $\rho'$ 爲$\Gamma$的準線，而$\Gamma$爲橢圓。




$(0<\theta<\omega')$

圖 5-1

(10)我們再驗證 P.90 $e=\dfrac{FF'}{AA'}=\dfrac{\cos\theta'}{\cos\omega}$

（原書實驗本之證明太辛苦了）。以下是簡捷的證明；

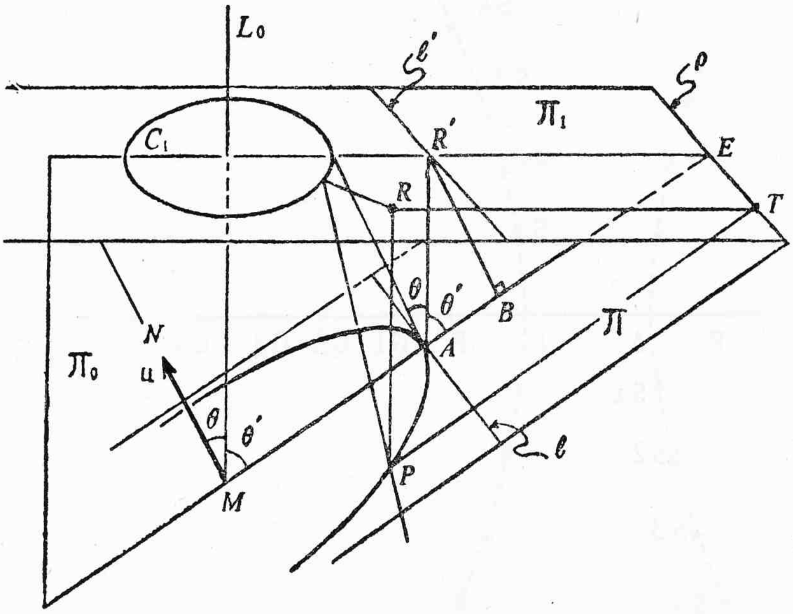
$\therefore$ $P$是$\Gamma$的任一點，具有 $PF/PT=\cos\theta'/\cos\omega=$定數的特質

則$P$亦可以爲 $A,A'$ 之可能，那麼，

$$\frac{A'F}{A'T'}=\frac{AF}{AT'}=\frac{\cos\theta'}{\cos\omega}=\frac{A'F-AF}{A'T'-AT'}=\frac{FF'}{AA'}$$

（其中 $T'$ 是 $AA'$ 至 $\rho$ 之垂足）

$$\therefore\quad e=\frac{FF'}{AA'}$$




**註**；何以 $AA'\perp\rho$？證明如下；（原載實驗本 P. 96）

自 $A$ 引 $\pi_1$ 的垂線交 $\pi_1$ 於 $R'$，再自 $R'$ 引直線 $AM$ 的垂線，垂足爲 $B$ 則因 $BR'$ 與 $MN$ 都垂直於 $MA$，且都在平面 $\pi_0$ 上，故 $BR'//MN$ 但 $MN$ 垂直 $\pi$，故 $BR'$ 亦爲 $\pi$ 的垂線。

另一方面，分別在 $\pi_1,\pi$ 上過 $R',A$ 按序引 $\rho$ 的平行直線 $l',l$，則因 $AR'$ 垂直於 $\pi_1$，故亦垂直於 $l'$ 但 $l\,//\,l'$ 故 $AR'$ 亦垂直於 $l$ 今利用三垂線定理得 $BA$ 垂直於 $l$，亦即 $AM\perp\rho_0$。

②驗證雙曲線（仿照橢圓的驗證，略）

③驗證拋物線；由①款之假設知：此時 $\theta'=\omega$ 而 $PF/PT=1$

即 $\Gamma$ 上的點至定直線 $\rho$ 之距與至定點 $F$ 之距相等，故 $\Gamma$ 爲拋物線。至此我們可以肯定"截痕"就是"錐線"無疑。當然證明是很簡捷而且符合邏輯的，一定可以被大家輕易接受的。

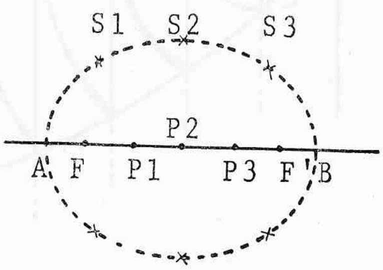
## 五、圓錐曲線的製圖

我們用圓規、直尺、描點（機械作圖）來繪製錐線，每次描點均可體驗出錐線之意義，讓我們仔細比較。

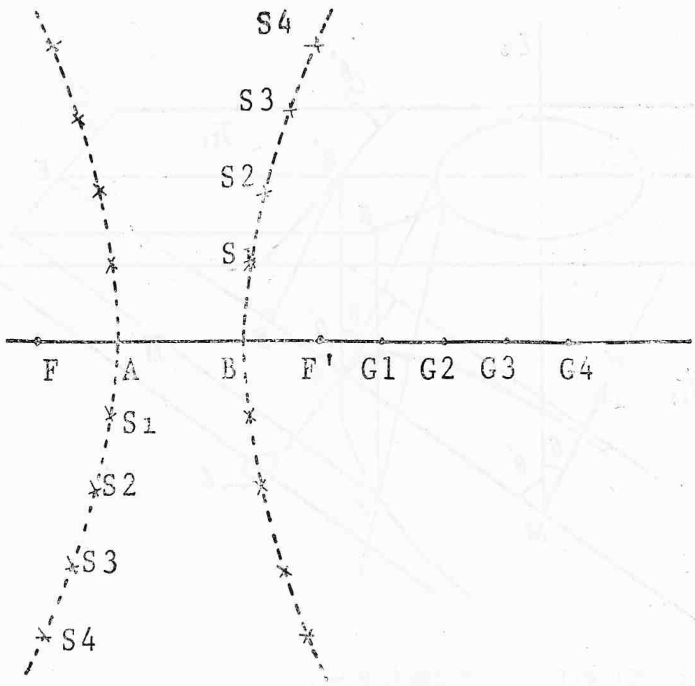
**①橢圓之製圖**

已知一橢圓長軸 $AB$，焦點 $FF'$，在 $FF'$ 上定任意點 $P_1P_2$……等，再以 $F,F'$，爲圓心，$(AP_1,BP_1),(AP_2,BP_2)$……爲半徑劃弧，得交點 $S_1,S_2,S_3$……，以圓滑曲線連結諸點即成。此繪法有一特質：

$$S_iF+S_iF=AP_i+BP_i=AB\qquad i=1,2,3\cdots\cdots$$



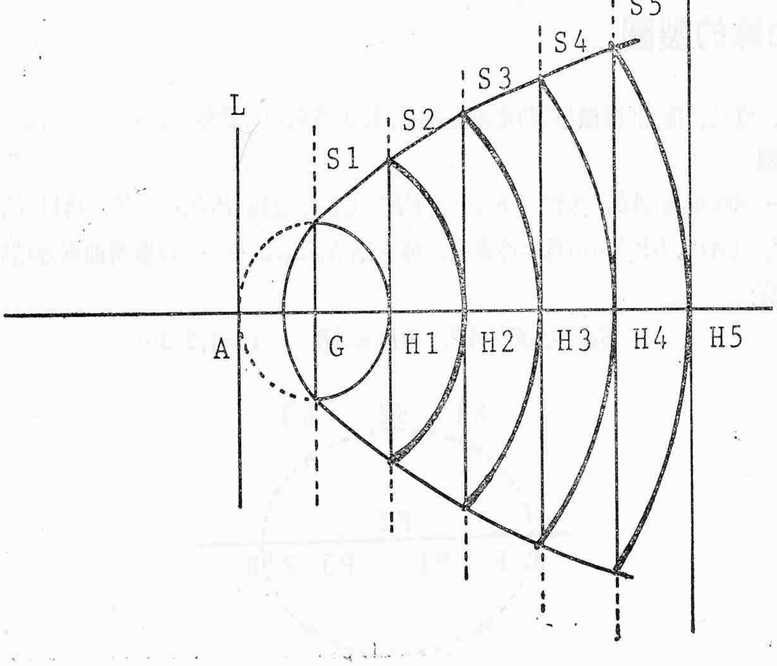
②雙曲線之製圖




已知雙曲線之兩焦點 $F, F', AB$ 即爲貫軸。在 $F'$ 之右方線上，劃出五個等分間隔，以 $G_1$, $G_2, G_3, G_4$，依次代之。以 $F$ 及 $F'$ 各爲圓心，$AG_i, BG_i \cdots\cdots$ $i=1,2,3,4$ 各爲半徑劃弧，交於 $S_1$, $S_2, S_3, S_4$ 連接諸交點，即得圓滑之雙曲線。

這顯示一特質：$|S_iF-S_iF'|=|AG_i-BG_i|=AB$（定長）$i=1,2,3,4$.

③拋物線之製圖



已知一拋物線的焦點 $G_0$，準線 $L$，於軸 $G_0A$ 上，畫出等分點列 $G_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$，過這些點列，分作平行準線之直線，再以 $G_0$ 爲圓心，$G_0H_1, G_0H_2 \cdots\cdots G_0H_5$ 爲半徑劃弧，各與諸平行線交於 $S_i$ $S_i'$，$i=1, 2\cdots\cdots 5$，連接之即得拋物線。

這顯示一特質：

$$G_0S_i = G_0H_i = AH_{i-1} \quad i=1, 2, \cdots\cdots 5$$

即拋物線上任一點 $S_i$ 至焦點 $G_0$ 之距離等於 $S_i$ 至準線之距。

（**註**：此處提出製圖，是用圓規與直尺及描點的機械製圖法，目的在配合起自國中的研討數學途徑之一貫作風）。

## 六、結論

我們探求一圖形，要掌握圖上之任一點（動點）的特有性質，本著此性質精確作圖外，還要用方程式來表示。（這方程式的好處是在坐標平面上，將動點 $(x, y)$ 之橫標與縱標的關係建立起來）則由方程式可測出圖形之大小，相關位置以及距離長度的種種問題。對截痕之研究，就是將一幾何圖案，用代數演算表來示其意義，然而又要從一代數式中，更深入地探討其幾何意義。我們就是要反覆地溝通代整與幾何的觀念，揉和代數、幾何兩個主題，我們循此規則研談數學。