再談棋盤截線

黃一樵

若一張$m\times n$棋盤可用1×2之骨牌完全覆滿，而且覆蓋時骨牌不得重覆，顯而易見其充要條件爲 m, n 之積爲偶數，所以這種棋盤可分爲 $2m\times 2n$ 和 $2m\times(2n+1)$ 兩種。現在我們再限制每條邊線都必須覆蓋骨牌（稱這種覆蓋爲正規覆蓋）來討論怎樣的棋盤可正規覆蓋，爲敍述方便以下稱垂直邊長爲m格的水平邊線依次 $M_0, M_1, M_2, \cdots\cdots, M_m$ ，水平邊長爲n 格的垂直邊線依次爲 $N_0, N_1, N_2, \cdots\cdots, N_n$。

首先證明若一個$m\times n$的棋盤可正規覆蓋。則$m\times(n+2)$的棋盤也可正規覆蓋。一個 $m\times(n+2)$ 的棋盤可分爲$m\times 2$和$m\times n$兩部分，$m\times n$部分將之正規覆蓋，$m\times 2$部分的每張骨牌都覆蓋成與邊長爲2格的邊平行，如此這個$m\times(n+2)$ 的棋盤就只剩下 N_n 一條邊線未覆蓋骨牌，若我們從 $m\times n$ 部分能找到一張和邊長爲 m 格的邊平行且和$m\times 2$ 部分相接的骨牌，把$m\times 2$ 部分與這張骨牌相接的兩

張骨牌位置做個調動（如圖一）$m\times(n+2)$的棋盤就可正規覆蓋了，這張骨牌的存在性是沒問題的，因爲若不存在，N_{n-1} 上就必須覆蓋m張骨牌，N_{n-2} 上就沒有骨牌了。

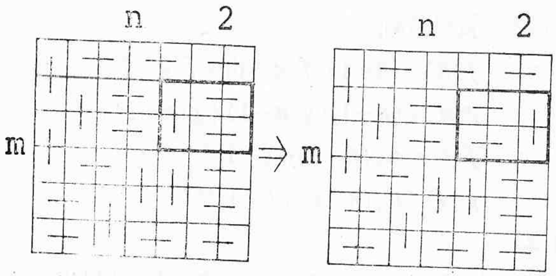

圖 一

下一步的工作就是要找一個「最小」可正規覆蓋的棋盤，因爲其它可正規覆蓋的棋盤「應該」可由此「最小」可正規覆蓋的棋盤擴充而得。

一、2m×2n 的棋盤

這種棋盤上的每一條邊線都把棋盤分成面積皆爲偶數的兩部分，因此每條邊線上至少要有兩張骨牌，否則有的邊線上會沒有骨牌，或是棋盤不能覆演，所以 $2m\times 2n$ 的棋盤可正規覆蓋的必要條件是

$$2mn\geq 2(2m-1)+2(2n-1)$$

$$\Longleftrightarrow (m-2)(n-2)\geq 2$$

我們不妨假設$m\geq n$，如此 m,n 的解爲

$$m\geq 4 \text{ 且 } n\geq 3$$

$m=4$，$n=3$ 時 $2m\times 2n$ 的棋盤可正規覆蓋（見圖二）而其它滿足 $(m-2)(n-2)\geq 2$ 的 $2m\times 2n$ 棋盤皆可由 8×6 的棋盤擴充而得，因此 $(m-2)(n-2)\geq 2$ 也是 $2m\times 2n$ 的棋盤可正規覆蓋的充分條件。

二、2m×(2n+1) 的棋盤

這種棋盤只有 $2n+(m-1)$ 條邊線把棋盤分成面積皆爲偶數的兩部分。因此 $2m\times(2n+1)$ 的棋盤可正規覆蓋的必要條件爲

$$m(2n+1)\geq 2(m-1+2n)+m$$

$$\Longleftrightarrow (m-2)(n-1)\geq 1$$

$$\Longleftrightarrow m\geq 3 \text{ 且 } n\geq 2$$

$m=3$，$n=2$ 時棋盤可正規覆蓋（見圖三）。所以 $(m-2)(n-1)\geq 1$ 也是 $2m\times(2n+1)$ 的棋盤可正規覆蓋的充分條件。

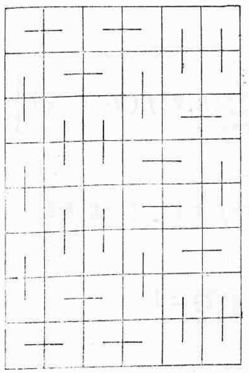

圖 二

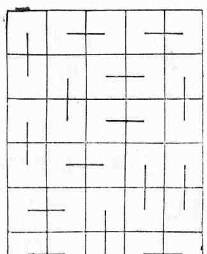

圖 三