上期演練試題解答

函數及其應用

羅添壽

㈠B

解

依題意知

$$S=\frac{1}{2}\times10\times t^2$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\times10\times(2.5)^2=31.25\ (\text{呎})$$

㈡D

解

$$6x+13y=989\Longrightarrow x=\frac{989-13y}{6}=164-2y+\frac{5-y}{6}$$

令 $y=k=-1\Longrightarrow x=167$

$$\text{故通解}\begin{cases}x=167+13t>0\Longrightarrow t>-167/13\\ y=-1-6t>0\Longrightarrow t<-1/6\end{cases}\Longrightarrow$$

$-167/13<t<-1/6,\ t\in z\Longrightarrow t=-12,-11,\cdots\cdots$ -1共12個

㈢C

解

依題知 $\log(x\cdot y)=\log x+\log y$

且 $\log^{10}=1,\log2=0.301$

$\therefore$ $\log16000=\log16\times10^3=3+\log_2 4$

$=4\times0.301+3=4.204$

㈣B

解

依題爲連續單調函數 $x>0$

$\therefore$ $\log xy=\log x+\log y,\quad \forall\quad x,y>0$

$\therefore$ $f(x,y)=f(x)+f(y)$

㈤A, D, E

解

在所有函數中能滿足此關係式者爲複角三角函數

令 $f=\sin,\ g=\cos$

則 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

且 $\cos^2x+\sin^2x=1\quad x\in R$

又 $\sin0=0,\cos0=1,\sin(-x)=-\sin x,$

$\cos(-x)=\cos x$ 且爲偶函數

㈥B

解

$\because$ $f(x)=x^2$

$\therefore$ $2-\sin x=x^2\Longrightarrow\sin x=2-x^2$

令 $y=\sin x$ 且 $y=2-x^2$ 且圖解得2交點,

㈦C, D, E

解

$$f(x)\cdot g(x)=4+2(\cos x-\sin x)-\sin x\cos x$$

令 $t=\cos x-\sin x,$

則 $\cos x\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$

又 $t=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

故 $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$

$\therefore$ $f(x)\cdot g(x)=4+2t+(t^2-1)/2$

$=[t^2+4t+7]/2=(t+2)^2/2+3/2$

當 $t=\sqrt{2}$ 時 $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{9+4\sqrt{2}}{2}=a$

當 $t=-\sqrt{2}$時$f(x)\cdot y(x)=\dfrac{9-4\sqrt{2}}{2}=b$

㈧A, C, E

解

① $f(x)=(x^{10}-1)(x-1)/(x^2-1)(x^5-1)$

$=(x^5+1)(x-1)(x^5-1)/(x^2-1)(x^5-1)$

$=\dfrac{x^5+1}{x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1$

② 又 $x=1+1/h$ 代入，而令 $h\longrightarrow\infty$，則相當於 x 用 1 代入得

$$\lim_{h\to\infty} f\left(1+\frac{1}{h}\right)=\lim_{x\to 1} x^4-x^3+x^2-x+1=1$$

又 $f(3)=3^4-3^3+3^2-3+1=61$

(九)**A, E**

解

① $\therefore\ f(x)-f(-1)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

$$\therefore\ g(x)=\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x+1}$$

$$=x^3+3x^2+3x+1$$

當然 $g(x)$ 仍為一多項式，且 $g(-1)=0$

② 一般學生錯覺 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$\therefore\ g(-1)$ 不存在這是不對的請注意

(十)**B, C**

解 學生自行利用運算性質演算之，

(土)**B, C**

解

$a\circ x=a+x+3=a\Longrightarrow x=-3$

$a\circ y=a+y+3=x=-3\Longrightarrow y=-a-6$

(土)**B, C, E**

解

依題意知

$x(1-x)>-72\Longrightarrow x^2-x-72<0$

$\Longrightarrow(x-9)(x+8)<0\Longrightarrow-8<x<9$

$\Longrightarrow x=-7,-6,\cdots\cdots6,7,8$

共 16 個 $\therefore x=16$ 且 $y=8$, $z=-7$

(圭)**D**

解

$$\therefore\ \frac{1}{f(x)}=\frac{-1}{(x-1)\cdot x}=-\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right],\ \text{但}\ x>1$$

$$\therefore\ \sum_{x=2}^{1978}\frac{1}{f(x)}=\sum_{x=2}^{1978}-\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\sum_{x=2}^{1978}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{1977}-\frac{1}{1978}\right)\right]$$

$$=-\left[1-\frac{1}{1978}\right]=-\frac{1977}{1978}$$

(古)**E**

解

$$\sum_{k=1}^{1978}\sum_{x=1}^{10}x(1-x)=\sum_{k=1}^{1778}\left(\sum_{x=1}^{10}x-\sum_{x=1}^{10}x^2\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{1978}\left(\frac{10\cdot11}{2}-\frac{10\cdot11\cdot21}{6}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{1978}(55-385)=\sum_{k=1}^{1978}(-330)$$

$$=(-330)\times1978=-652740$$

(圭)**A, E**

解

① $\because$ S 收斂 $\therefore r=|x(1-x)|<1$

且 $x\neq0$, $x\neq1$

$\therefore\ -1<x(1-x)<1$, $x\neq0$, $x\neq1\Longrightarrow$

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $x\neq0$, $x\neq1$

② $S=\dfrac{1}{1-x(1-x)}=\dfrac{1}{(x-1/2)^2+3/4}$

當 $x=1/2$ 時 S 最大值為 $\dfrac{1}{3/4}=4/3$

當 $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 時 S 最小值為 $\dfrac{1}{2}$，但 $x>\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

故 $1/2<S\leq4/3$ 即 S 無最小值

(夫)**A**

解

由第12題知 $S=\{-7,-6,\cdots\cdots6,7,8\}\Longrightarrow n(S)=16$

又 $x^3-4x^2-x+4=(x+1)(x+1)(x-4)\leq0$

$\Longrightarrow x\leq-1$ or $1\leq x\leq4$

設 $A=\{x|x\in Z$，且 $x\leq-1$ or $1\leq x\leq4$, $x\in S\}$

$\therefore\ A=\{-7,-6\cdots\cdots-1\}\cup\{1,2,3,4\}$

$\therefore\ n(A)=11$

$\therefore\ p(A)=11/16=0.688$

(古)**B**

解

令 $p(x,y)$ 為圖形上任一點，

則 $PA=\sqrt{(x-1/2)^2+(y+2)^2}$

$=\sqrt{x^2-x+1/4+y^2+4y+4}$

$=\sqrt{-y+1/4+y^2+4y+4}$

$=\sqrt{y^2+3y+17/4}$

$=\sqrt{y^2+3y+9/4-9/4+17/4}$

$=\sqrt{(y+3/2)^2+2}$

$\therefore$ 當 $y=-\dfrac{3}{2}$ 時最小 $PA=\sqrt{2}$

(十八) A, E

解

$\because\ x-x^2=-\dfrac{3}{2}\Longrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$

(十九) D

解

$\therefore\ g(|z|)=|z|^3-4|z|^2-|z|+4$

$=(|z|-1)(|z|+1)(|z|-4)\le 0$

$\Longrightarrow(|z|-1)(|z|-4)\le 0(\because |z|+1>0)$

$\Longrightarrow 1\le|z|\le 4\Longrightarrow$ 爲一環形區域

故所求爲 $\pi\cdot 4^2-\pi\cdot 1^2=15\pi$

(二十) B, D, E

解

$g(x)=x^3-4x^2-x+4$

$\therefore\ g'(x)=3x^2-8x-1=0$

$\Longrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{19}}{3}$ 爲臨界值

又 $g''(x)=6x-8$

且 $g''\left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3}\right)=6\cdot\dfrac{4+\sqrt{19}}{3}-8=2\sqrt{19}>0$

故當 $x=\dfrac{4+\sqrt{19}}{3}$ 時有極小值 $m=g\left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3}\right)$

$g''\left(\dfrac{4-\sqrt{19}}{5}\right)=-2\sqrt{19}<0$

故當 $x=\dfrac{4-\sqrt{19}}{3}$ 時有極大值

$M=g\left(\dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right)$

(二一) D

解

設 $f(x)=(a^x+a^{-x})/2,\ g(x)=(a^x-a^{-x})/2$

則 $f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

且 $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

又 $F(x)=g(x)/f(x)$

$\therefore\ F(x+y)=g(x+y)/f(x+y)$

$=\dfrac{f(x)g(y)+g(x)g(y)}{f(x)f(y)+g(x)g(y)}$

$=\dfrac{F(x)F(y)}{1+F(x)F(y)}$

(二二) B

解

代入 $F(x+y)=\dfrac{F(x)+F(y)}{1+F(x)F(y)}$ 中得

$F(a+b)=5/7$

(二三) B

解

由 $S(n)=p^n+q^n$ 得 $S(0)=2,\ S(1)=p+q,$

$S(2)=p^2+q^2=(p+q)^2-2pq$

又由

$$\begin{cases}aS(1)+b=0\\ aS(2)+bS(1)+cS(0)=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a(p+q)+b=0\\ a\{(p+q)^2-2pq\}+b(p+q)+2c=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}p+q=-b/a\\ pq=c/a\end{cases}$$

$\therefore\ p,q$ 爲其二根

(二四) C

解

$aS(n)=a(p^n+q^n)$

$=a\{(p+q)(p^{n-1}+q^{n-1})-pq(p^{n-2}+q^{n-2})\}$

$=a\left\{-\dfrac{b}{a}S(n-1)-\dfrac{c}{a}S(n-2)\right\}$

$=-bS(n-1)-cS(n-2)$

$\therefore\ aS(n)+bS(n-1)+cS(n-2)=0$

(二五) C

解

設 $F(x)=f(x)-2x+3=ax^3+bx^2-x-1$

$\therefore\ (x-1)^2$ 爲 $F(x)$ 之因式

$\therefore\ F(1)=0$ 且 $F'(1)=0\Longrightarrow a=-3,\ b=5$

$\therefore\ f(x)=-3x^3+5x^2+x-4$

故以 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式爲 $-18x-15$

(二六) A

解

令 $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\Longrightarrow 2x+1=\sqrt{13}$

$\Longrightarrow 4x^2+4x+1=13$

$\Longrightarrow x^2+x-3=0$

又原式 $=x^3+3x^2-x-6=(x^2+x-3)(x+2)$

$=0\cdot(x+2)=0$

(27) **B, E**

解

① 解方程組得 $x=a+5$，$y=a-1$，$z=2a+3$

② $x^2+y^2+z^2=(a+5)^2+(a-1)^2+(2a+3)^2$
$=6(a+5/3)^2+55/3$

③ $\because a\in z$ $\therefore$ 當 $a=-2$ 時有最小值 $m=19$

(28) **A, B, C**

解

$\because$ $\forall x\in R$, $y=ax^2+bx+c>0$ 恆成立
$\Longleftrightarrow a>0$, $\triangle=b^2-4ac<0$

$\therefore$ $\triangle=4(a-5)^2-4\cdot2\cdot(3a-19)<0$
$\Longrightarrow 7<a<9$ 但 $a\in z$ $\therefore a=8$

(29) **E**

解

① $(\log 2x)(\log ax)+1>0$
$\Longrightarrow(\log x+\log 2)(\log x+\log a)+1>0$
$\Longrightarrow(\log x)^2+(\log 2+\log a)(\log x)$
$+(\log a\log 2+1)>0$

② $\because$ $\forall x\in R^+$ 上式恆成立即表 $\forall \log x\in R$，上式恆成立

故 $\triangle=(\log 2+\log a)^2-4(\log a\log 2+1)<0$

即 $(\log a-\log 2)^2<4$ $\therefore -2<\log\frac{a}{2}<2$

$\therefore$ $\log\frac{1}{100}<\log\frac{a}{2}<\log 100$
$\Longrightarrow\frac{1}{100}<\frac{a}{2}<100\Longrightarrow\frac{1}{50}<a<200$

(30) **B**

解

設 $A(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)$ $B(r,S)=(\cos\phi,\sin\phi)$

$\because$ $pr+qs=0\Longrightarrow\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi=0$
$\Longrightarrow\cos(\theta-\phi)=0$

又 $MN=\sqrt{(p-q)^2+(r-s)^2}$
$=\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\cos\phi-\sin\phi)^2}$
$=\sqrt{2-(\sin 2\theta+\sin 2\phi)}$
$=\sqrt{2-2\sin(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)}=\sqrt{2}$
$(\because\cos(\theta-\phi)=0)$

(31) **D**

解

① $\because$ 點 $p(x,y)\in$ II $\therefore -1<x<0$, $0<y<1$

② $\because$ $2^{-x}\cos y\vee 0$, $2^{-x}\sin y>0$ 在第 I 或 V 象限

又 $(2^{-x}\cos y)^2+(2^{-x}\sin y)^2=2^{-2x}>1$
$(\because -1<x<0)$

$\therefore$ 在圓之外部

故 $Q(2^{-x}\cos y, 2^{-x}\sin y)\in V$

(32) **A, C**

解

① 依題意知 $f(8,5)>0$ 故 $(8,5)$ 在圓外

② $m=\sqrt{8^2+5^2}-4=\sqrt{89}-4$, $M=\sqrt{89}+4$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PO}: 5x-8y=0$

$\therefore$ $\begin{cases}5x-8y=0\\x^2+y^2=16\end{cases}$

$\Longrightarrow\frac{64}{25}y^2+y^2=16$

$\Longrightarrow\frac{89}{25}y^3=16$

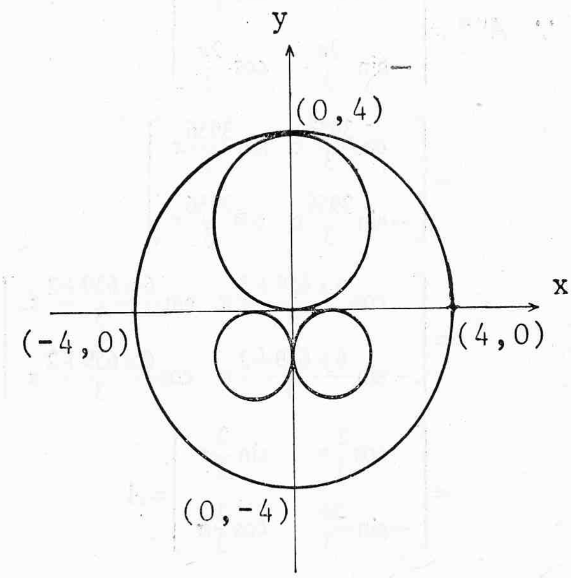
$\Longrightarrow y^2=\frac{4^2\times5^2}{89}\Longrightarrow y=\pm\frac{20}{\sqrt{89}}$

$\therefore$ $A\left(\frac{32}{\sqrt{89}},\frac{20}{\sqrt{89}}\right)$ $B\left(\frac{-32}{\sqrt{89}},\frac{-20}{\sqrt{89}}\right)$

(33) **B, D**

解

依題意知 S 表三小圓外部且大圓內部區域，又 S 對稱於 y 軸其面積爲 $\pi, 4^2-\pi\cdot(2^2+1^2+1^2)=10\pi$



(34) **C, D, E**

解

令 $p(x,y)$, $p'(x',y')$ 爲 $g(x,y)=0$ 與 $g'(x,y)=0$ 上之點，

$\because$ $3x-y+2=0$ 之斜率爲 $\tan\alpha=m=3/1$

$\therefore$ 由向量之性質知 $\overrightarrow{PP'}=[1,3]$
$\Longrightarrow[x'-x, y'-y]=[1,3]$

$\therefore \begin{cases} x'-x=1 \\ y'-y=3 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'-3 \end{cases}$

代入 $g(x,y)=0$ 中

得 $(x'-1)^2+(y'-3)^2-4(y'-3)=0$

$\Longrightarrow x'^2+y'^2-2x'-10y'+22=0$

$\therefore \ g'(x,y)=x^2+y^2-2x-10y+22=0$

(三六)A, B, C

解

$\because \ v=f(\vec{u}) \Longrightarrow [x-2y, -y]=f([x,y])$

$\therefore \ f(\vec{a})=[-1,-1]$ 且 $f(\vec{b})=[1,0]$

又 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $f(\vec{a})\cdot f(\vec{b})=-1$

$\therefore \ \vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角 $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$

$f(\vec{a})$ 與 $f(\vec{b})$ 之夾角 θ 爲 $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})=3\pi/4$

又由代入化簡知A，B爲眞

(三七)A

解

$$\because \ A^{1978}=\begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}^{1978}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\frac{3956}{3}\pi & \sin\frac{3956}{3}\pi \\ -\sin\frac{3956}{3}\pi & \cos\frac{3956}{3}\pi \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\frac{6\times659+2}{3}\pi & \sin\frac{6\times659+2}{3}\pi \\ -\sin\frac{6\times659+2}{3}\pi & \cos\frac{6\times659+2}{3}\pi \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2}{3}\pi \end{bmatrix}=A$$

(三八)D

解

直線$\begin{cases} 2x+y-z+3=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ 之方向向量爲

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1:-1:1$$

且 $(0,-1,2)$ 爲直線上一點 ∴參數式爲

$\begin{cases} x=t \\ y=-1-t \\ z=2+t \end{cases}$ 代入 S 得

$3t^2+2t-21=0 \Longrightarrow t=7/3$ 或 $t=-3$

$\therefore \ \overline{AB}: \begin{cases} x=t \\ y=-1-t \\ z=2+t \end{cases}$ 且 $-3\leq t\leq 7/3$

但 $t\in z$ $\therefore t=-3,-2,-1,0,1,2$ 共 6 個

(三九)A, B, D

解

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

① $0<x_1<x_2$ 時

由 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}$

$=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}<0$

故 $f(x_1)<f(x_2)$

② $x_1>0$, $x_2>0$

由 $f(x_1)+f(x_2)-f(x_1+x_2)$

$=\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1+x_2}{1+x_1+x_2}$

$=\frac{x_1^2x_2+x_1x_2^2+2x_1x_2}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_1+x_2)}$

$\therefore \ f(x_1)+f(x_2)>f(x_1+x_2)$

③ $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$ 時

由②知 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$

$>f(x_1+x_2)+f(x_3)$

$>f(x_1+x_2+x_3)$

④ 由 $\frac{f(1)+f(3)}{2}=[1/2+3/4]/2$

$=5/8=15/24<16/24=2/3$

$=f(2)=f\left(\frac{1+3}{2}\right)$

(四〇)B, C, E

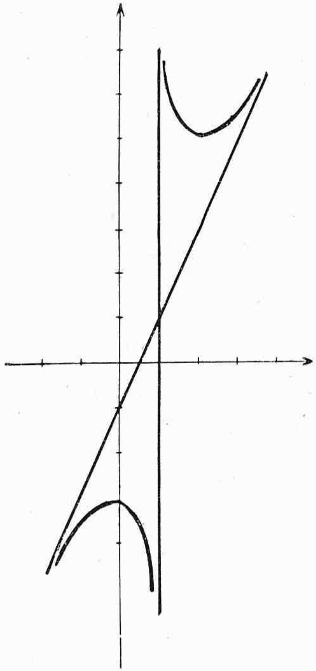
解

① 令 $y=f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x-1}$

$=(2x-1)+\frac{2}{x-1}$ 圖形爲雙曲線（見圖）

$x-1=0$ 與 $y=2x-1$ 爲二漸近線

② 求 $f(x)$（卽 y）之範圍，亦卽求極值（判別法）



今對 x 整理得

$$2x^2-(y+3)x+(y+3)=0$$

$\because$ $x\in R$ $\therefore$判別式 $\triangle=(y+3)^2-8(y+3)\geq 0$

$\therefore$ $(y-5)(y+3)\geq 0 \Longrightarrow y\geq 5$ 或 $y\leq -3$

討論 (i) 當 $y=5$ 時 $x=2$ 極小點爲 $(2,5)$ 極小值爲 5

(ii) 當 $y=-3$ 時，$x=0$ 得極大點 $(0,-3)$ 極大值爲 -3

由①②作圖並由圖形觀察知(B)，(C)，(E)正確由圖知當 $x>2$ 時爲遞增函數，故(E)對又 $x>0$ 時非遞增，亦非遞減故(D)不眞