中國數學史簡說

黃武雄

我們將引介中國數學史的概貌，把中國數學史史分成啓蒙期、發展期與成熟期三個時期，逐條列出每一時期各級方法所發展的內容，說明各級方法在各個時期孕育與成長的情形。自然我們會遇到若干歸屬不清，不易正確列入某一級方法的內容。由於我們指出的各級方法多少有着一級級發上展來的程序，並不是互不相干，各自成長的，便不免要有某些題材爲不同的兩級或兩級以上的方法所共用；這種情形尤其容易出現於孕育時期的題材。例如招差法（有限級數求知），既起源於堆垜問題，要列出每層個數，自然與幾何形體有關，可列入「轉化方法」的初等基礎。但它的內容主要是級數求和的計算，顯然又屬「代數方法」的算術基礎。而朱世傑、郭守敬將招差法換個面貌，就是三次函數內插的逼近問題，演得牛頓的三階差公式，探討日月五星的位置，當然又可將它當作「局部化方法」的一個準備題材。

(一) 啓蒙期的中國數學（漢以前）

一般認定，周髀算經是中國現存最早的一部數學典籍，成書時間大約在兩漢之間（紀之元後）。也有史家認爲它的出現更早，是孕於周而成於西漢，甚至更有人說它出現在紀元前 1000 年。

嚴格說來，周髀算經是一部天文著作，爲討論天文曆法，而敍述一些有關的數學知識，其中重要的題材有勾股定理、比例測量與計算天體方位所不能避免的分數四則運算。例如周髀算經認爲一年有 $365^1/_4$ 日而平均有 $12^7/_{19}$ 個月，亦即每 19 年應有 7 個閏月，這樣每個月的日數應該是

$$365\frac{1}{4}\div 12\frac{7}{19}=29\frac{499}{940}$$

但月亮每日所行平均度數爲 $13^7/_{19}$ 度（一周以 $365^1/_4$ 度計算，這點有別於西方數學所採用的 360 度），要求出 12 個月以後月亮所在的方位。那麼其問題便在於計算

$$29\frac{499}{940}\times 13\frac{7}{19}\times 12\div 365\frac{1}{4}\text{，得 } 12\frac{17328}{17860}$$

將其餘數 $\frac{17328}{17860}$ 再乘以 $365\frac{1}{4}$，便知所求方位爲 $354\frac{6612}{17860}$。

通過算籌，中國人很早就掌握了複雜的計算。比起同時期的西方數學（例如以歐幾里得的幾何原本所記載的分數性質來看），古代中國數學的定量工作，無疑是遙遙領前的。

稍後出現的九章算術（東漢中期，不遲於公元 100 年）才眞正是第一部把古代中國數學已有的知識加以總結的書籍。

九章算術的內容實已相當完備，收錄有 246 個題目，分「方田」、「粟米」、「衰分」、「少廣」、「商功」、「均輸」、「盈不足」、「方程」、「勾股」等九章編成。爲代數方法與轉化方法提供了初步的基礎。

(i) 在代數方法上面，

可列爲其算術基礎的有

正負數的四則運算（「方程」）

通分、分數四則（「方田」）

比例（「粟米」、「衰分」、「均輸」）

一次不定方程（「盈不足」）

開平方、開立方（「少廣」）

可當作「未知數原理」的雛形的有

聯立一次方程，即高斯消元法

（「方程」中所謂的方程術）

一元二次方程的數值解法

（「勾股」中的帶從開方法，將有一次項的二次方程化為「少廣」中的開平方法解之）

(ii)在轉化方法上面

關聯「形」與「量」的有

面積計算（「方圜」，限於直線與圓成的圖形，如三角形、梯形、圓形、弓形、環形等）

體積計算（「商功」，各種由平面圍成的圖形，及圓柱、圓臺及球體積的粗略估計）

勾股定理及相似直角三角形的運用（「勾股」）

（二）發展期的中國數學（魏晉到隋唐）

東漢九章算術出現以後，注釋與修正的工作不停的發展。魏晉趙爽　作「勾股方圓圖注」，利用勾股原理，完成一般一元二次方程(首項係數可以為負，即呈$-x^2+Ax=B$，A與$B>0$的式子)的公式解，他的方法基本上是幾何解法。三國時代，劉徽注九章算術（263年)。九章算術中取圓周率為3，劉徽提出「割圓術」，計算正192邊形的面積，求得3.141的三位小數近似值。其後南北朝祖沖之(429-500)更把這結果向前推進，在綴術一書中，找到3.1415926的密率。綴術已失傳，祖沖之的工作載於隋書、律曆志中，原文記錄這段陸續修正的工作說：「圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒各設新率，未臻折衷。」「祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間」，這就是說

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

又說密率，圓徑一百十三，圓周三百五十五；約率，圓徑七，周二十二」意即355/113與22/7是π近似的分數表示，前者比後者精密些。

當然社會本身的發展也產生新的問題。例如為使曆法進一步精密，隋劉焯(544-610)開始引入二次內插法，與垛積級數問題關聯起來。為符合計算的進一步需要，籌算制度也在改良（夏侯陽算經）。而工程分配上面也出現了三次方程的問題，唐王孝通（626年）輯古算經中記載了複雜的三次方程的題目，並將「帶從開（平）方法」推廣為「帶從開立方」，有效地解決了係數皆正的三次方程的數值求解問題。關於整數論的一些初級問題如「鬼谷算」（孫子算經），「百雞問題」（張丘建算經）及「幻方」(即魔方陣，見於數術記遺）也紛紛出現。

如果將九章算術的內容當作中國數學的雛型，那麼自東漢到隋唐（即公元第二世紀到第十世紀），可稱為它的發展期，隋唐以後漸臻成熟。到十三世紀南宋及元初，才進入中國數學的黃金時代。現在先將發展期的幾項主要成就及著作羅列於后：

(i) 在代數方法上面，

有關「未知數原理」的基礎的有

一般一元二次方程的公式解（魏晉趙爽「勾股方圓圖注」，公元三、四世紀）

三次方程的數值解法（系數與根皆正數，利用帶從開立方，唐王孝通「輯古算徑」，公元626年）

而屬於算術發展部分的有

一次不定方程
- 孫子問題（又名鬼谷算或韓信點兵，原爲曆法上推求「日月如合璧、五星連珠」的上元積年而作，載於孫子算經的已有一些簡易的有關問題。一般理論要到宋代秦九韶作「大衍求一術」時，才漸成形。）
- 百雞問題（求三元一次聯立不定方程的整數解，載於張丘建算經）。

(ii) 在轉化方法上面，

進一步關聯「形」與「量」的個別結果的有

圓周率的計算（劉徽注九章，增列「割圓術」（263 年），得圓周率 3.141。祖沖之（429-500）作綴術，推進到 3.1415926〔2〕)，

面積、體積的進一步計算（劉徽以拼湊法證得方臺體積爲$\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$，其中a, b分別爲上底、下底兩正方形的邊長(〔3〕)。祖沖之更求得球體積爲$\frac{4}{3}\pi r^3$)

(iii)在局部化法上面

已具有「變量數學」的雛型的有

二次內插公式（隋唐時期，因爲要計算日月五星的方位，通過隋劉焯（544-610）中唐一行和尙（683-?）到晚唐徐昂等人一系列的工作，求得與十七世紀牛頓的二階差公式相當的二次內插公式）

而確含局部化意義的有

Cavalieri 原理（祖沖之在求球體積時已提出 Cavalieri 原理，計算牟合方蓋，比 Cavalieri (1598-1647) 早了一千年，祖沖之與 Cavalieri 都限於沒有完好的微積分而沒有給出證明。）

著作方面，唐朝新唐書藝文志中收錄的十部算經（李淳風注）很能夠反應發展期的數學水準。十部算經除收集早期的周髀九章之外還包羅了

海島算經（劉徽，263 年）

孫子算經、夏侯陽算經、張丘建算經（皆爲第三、四世紀之作，但夏侯陽現傳本則迭經增補，搜集的材料包含到第八世紀的有關內容）

五曹算術、五經算術（五曹爲官吏手册，五經則傾向玄學，無甚內容）

輯古算經（唐、王孝通，626 年稍后定成）

另外亦含第五世紀祖沖之所作綴術，惜已失傳。十三世紀宋朝再刻十部算經時，便以數術記遺代之，成爲現存的算經十書。

(三) 黃金時期（十二、三世紀的宋元數學）

宋元兩代，中國數學進入了黃金時期，尤其來到十三世紀，成就更趨輝煌。不只相對於中國本身古來的數學，得到空前的發展，放眼於當時阿拉伯、印度及歐洲各地的數學水準，也是處於遙遙領先的地位。

宋元黃金時期的數學家，一般以南方的秦九韶、楊輝，北方的李治、朱世傑爲代表，合稱秦、李、楊、朱四家。事實上，四家之前有北宋支持王安石變法的沈括（1031-95）。沈括晚年著有夢溪筆談，討論「隙積術」，開創了高階等差級數的研究。又有楚衍（與沈括約同時代，在司天監工作）的學生賈憲，作「增乘開方法」引進隨乘隨加的方法，開平方開立方法。由於隨乘隨加的方法暗含着二項式定理的係數分配，

這種開方法馬上可以推廣到高次開方，爲其後不久劉益、秦九韶作一般高次方程的數值解法舖路。在西方，高次方程的數值解法要延到十九世紀才由 Ruffini (1804) 與 Horner (1819) 具體提出，西方數學慣稱爲 Horner method（霍納方法）。

四家之後，還有王恂、郭守敬，在編授時曆時引入求解球面直角三角形的方法。

四家之中，秦九韶的工作較廣博，楊輝重視通俗實用，李治深入而有創意，朱世傑乃集大成。清疇人傳續篇中說：「漢卿（朱世傑）在宋元間，與秦道古（九韶），李仁卿（李治）可稱鼎足而三。道古正負開方，仁卿天元如積，皆足上下千古；漢卿又兼包家有，充類盡量，神而明之，尤超越秦、李兩家之上。」

秦九韶「性極機巧，星象、音律、算術以至於營造等事，無不精究。」他在數學上的主要兩個貢獻是解高次數值方程及建立大衍求一術。他的數學思想則帶有神秘主義的傾向，他在兵荒馬亂中編數書九章，序中說：「不自意全於矢石間，嘗險罹憂，荏苒十禩(十年)，心槁氣落，信知夫物莫不有數也。」可是從「物莫不有數」的思想出發，一方面正確的主張數學可以「經世務、類萬物」，另一方面則掉入神秘主義的窠峊，認定數學又可「通神明，順性命」。雖然他不能像李治正確的看出「謂數學雖窮，斯可；謂數不可窮，斯不可」「彼其冥冥之中，固有昭昭者存」，將數學與科學從神學與玄學的束縛中解放出來；但與同時期歐洲的數學家，甚至與十七世紀文藝復興以後思想上最進步的笛卡兒，牛頓等人，作個比較，歐洲數學家形而上主義的傾向當爲更加濃厚。

李治與朱世傑所發明的「天元術」、「四元術」正是代數方法的關鍵。天元術就是代數上的未知數原理的充分體現。「天元」也就是「未知數」。李治測圓海鏡(1248)有一個題目：「（假定圓城一所，不知圓徑），丙出南門直行一百三十五步而立，甲出東門直行一十六步，見之，（問徑幾何？）」天元術討論怎樣列出其方程：

$$-x^4+8640x^2+652320x+4665600=0$$

然後，利用當時已經熟知的高次方程數值解法求得一百二十步(卽半城徑也)。朱世傑在四元玉鑑三卷中「分門二十有四，立問二百八十有八」反覆討論多元高次方程的解題法。立天地人物四元（四個未知數），利用算籌盤面的四個方向，「陰陽升降進退，左右互通變化」。由於算籌本身的限制，朱世傑所解的多元方程，都限制在四元以下。

「天元術」與「四元術」，可以說是把代數方法發揮到了極致。

先將秦李楊朱四家的主要著作列表於下：

秦九韶：數書九章(1247)，全書分九類：大衍、天時、田域、測望、賦役、錢穀、營建、軍旅、市易 。每類 9 個題目，共 81 題。

李治：測圓海鏡(1248)，益古演段（1259）。

楊輝：詳解九章算法（1261），日用算法（1262），楊輝算法（1274-1275））。

朱世傑：算學啓蒙(1299)，四元玉鑑（1303）。

由於他們的成果十分豐富，我們只抽出其中較有代表性的題材，依方法論分類如下：

（i）在代數方法上面，

屬整數論的有

不定方程中的聯立一次同餘問題（卽前述孫子問題，秦九韶稱之爲「大衍求一術」，找到了一般理論，西方人稱之爲「中國剩餘定理」（Chinese Remainder theorem），同樣的理論十八世紀以後逐步由尤拉(1707-1789) 與高斯 (1777-1855) 建立。）

而有關未知數原理的有

一般高次方程的數值解法（賈憲（十一世紀中期）劉益、秦九韶(1247)）

未知數原理，多項式運算，（以李治「天元術」(1248) 爲代表。

多元（最多四元）高次聯立方程的求解（朱世傑四元玉鑑以「四元術」(1303)逐步消元，西方在十八世紀 Bezout (1779) 才出現有系統的討論）

二項係數分配（即所謂「巴斯卡三角」，賈憲所作開方作法本源，載於楊輝詳解九章算法(1261)一書中。而朱世傑亦有古法七乘方圖，在西方巴斯卡（法）作此圖時已晚賈、朱四五百年。）

(ii)在轉化方法上面

由於「形」與「量」之間個別的轉化關係到隋唐時大體已經完備，除了秦九韶在數書九章中繼續求解較爲複雜的面積體積測量等問題，及郭守敬進一步作球面三角、垛積問題以外，宋元時期便沒什麼重大的進展。這時候中國數學若想進一步發展，把握形與量間有系統的轉化關係，就要有更強烈的社會需求。譬如像西方數學在十七世紀前期，爲了描寫質點或砲彈的運動軌跡，須要將曲線用代數的表示方式寫下來，才能進一步計算，(例如費馬 (Fermat) 想算砲彈射程最遠時，發射角應該多少？ (45°))，這種狀況之下，費馬，笛卡兒等人便開始引入座標，這才產生了解析幾何，把握了轉化方法的關鍵。可是當時的中國社會沒有這樣的條件，有了很多「形」與「量」的個別關係，但產生不出「形」與「量」之間有系統的轉化關係。（有一種說法：火藥旣爲中國人所發明，如果中國社會步入資本主義，須要在商業與軍事上向外擴張，那麼不只是解析幾何，就是微積分也自然會發生在中國。）

值得注意，不管在代數方法或轉化方法上，中國數學家在定量方面的努力都已接近飽和，必須轉向去做些定性的工作。例如在代數方法上有了天元術、四元術，便須轉個方向去考慮根與係數的定性關係，才能再往前推進，做出像十九世紀 Abel, Galois 的方程論那樣的工作。而在轉化方法上，有了個別的關係也須要改做些定性的考慮，到定性方面去找尋有系統的轉化關係，發展出像解析幾何之類的工作。

(iii)在局部化方法上面

有關變量數學的有三次函數內插法（郭守敬「平、立、定」三差術，朱世傑更算得牛頓公式

$$f(n)=n\triangle+\frac{1}{2!}n(n-1)\triangle^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\triangle^3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\triangle^4)$$

但變量數學終究不曾出現在中國，道理還是社會條件不夠，當時中國社會以天文曆法所需的數學最爲繁複。內插法是一種逼近，隱約有了變量數學的成份。但變量數學得以發展的眞正關鍵在於引入變化率。日月五星的運行雖也有變量，但運行的瞬間速度在當時還不必去考慮，不像在歐洲，力學已發展到須要找出運動規律的時候了。十三世紀前的中國數學在局部化方法上所作的貢獻只限於三次函數的內插逼近及早先祖沖之的 Cavalieri 原理。

宋元以後，明代理學對科學技術與思想的發展造成一定的束縛。除程大位算法統宗繼吳敬，徐心魯等人將籌算改良，發展爲珠算，便利四則計算之外，明朝兩百年間，不僅沒承繼宋元數學而持續發展，甚至宋元著作散失，數學水準普遍下降。明末淸初，西方傳敎士陸續來華之時，中國數學正處低潮時期，兩種文化的交會結束了中國本土數學的發展。

附　註

〔1〕時間不很確定，約在公元三、四世紀。

〔2〕這個記錄在西方，直到十六世紀法國 Viète 才將它打破，推到十位小數。而中世紀伊斯蘭國家 Al-Kashi 則比 Viète 稍早於 1427 年便求到小數第十六位。

〔3〕九章算術也有這個公式，但沒有證明，埃及人也早在公元前一千年以前便有此公式，當然也沒有證明。

〔4〕雖然笛卡兒革命性的指出聖經不是知識的來源，知識要依靠理性。引起敎會查禁他的言論，但笛卡兒仍是衷心相信上帝依據數學規律創造自然。並想盡辦法用他所標榜的「理性」去證明上帝的存在。牛頓也把發現科學成果的動機歸於要了解上帝創造的自然，而將科學完整的理論作爲上帝存在的證據，晚年時，牛頓更想考據天文學中發生的特殊事件的日期，試圖找出它們與聖經故事的關聯。 這些宗敎的束縛在中國數學家的身上是不易看到的， 這種玄學思想對於研究數學的風格，也產生很大的影響。

本文節自黃武雄敎授著「中西數學史概說」，人間文化事業有限公司卽日出版，臺北郵政信箱 22-215 號。