西方 π 的古代史

連永君 譯寫

譯者的話

科羅拉多大學電機系的教授 Petr Beckmann 在 1970 年寫了一本 π 的歷史(A History of Pi)。書中詳述 π 的發展過程，從求 π 的方法，方圓問題，微積分的誕生，以迄超越數和 π 的超越性，娓娓道來，條理十足。正如作者在序言中所說:「π 的歷史是人類歷史的一面有趣的小鏡子」，從書中我們可以讀到人類知識是怎麼樣的點滴積聚而來，也可以體會到科學是如何在人類的愚蠢和暴戾中掙扎着生長。本文是由原書前三分之一且譯且寫濃縮而來的，並沒有完全忠實於 Beckmann 的原文，但總是努力保存原來的意思。

第一節 破 曉

人類出現在地球上已歷一百萬年。此期間他學會了識別形狀和方向；能把握量與數目的觀念；而且知道量與量之間的某些關係。這個智慧發展過程的詳情沒有人知道。最早的一點蛛絲馬跡遠溯到石器時代——1937年捷克出土一根石器時代的狼骨頭，上面有許多切口，顯然供記數之用。愈到了後來，人類演進的痕跡愈多，但也只有到了紀元前兩千年左右，眞確的事實才開始直接記載在典籍上，而不須由間接證據來旁敲側擊。其中的一項事實便是：紀元前兩千年時人類已經知道那個今天寫成 π 的數的意義，而且有了粗略的値。

爲了交待這一段由萬古洪荒至紀元前兩千年的 π 的演進過程我們惟有回到石器時代，甚或更荒遠的以前，而進入臆測的領域。

遠在發明輪子之前，人類已能辨識圓形，人獸的瞳孔，日月的輪，花朵的中心等等都是自然界的圓。接着人類掌握了大小的觀念——圓有大小，樹有高矮，有重石頭，更重的石頭和非常重的石頭。由這類性質上的記述發展到數量的測度便是數學的破曉時期。路程一定是長遠而艱巨的，但我們可以有把握的說，起初量只有整數値，比如人、獸、樹、石頭、棍子的數目。

再進一步便是發現不同量之間的關係了。大點的石頭重些，老樹高些，多打幾次獵便多些收穫，田地大點收成也多些，在這許多類似的關係中有一個難逃法眼的便是：圓愈寬，周也愈長。這一類性質的思考終於轉變爲數量的斟酌。石頭的體積大一倍也就重一倍；三倍的田地可得三倍的收成，加倍圓的直徑也就加倍它的周長。當然這一條法則不是永遠行得通；兩倍老的樹不見得兩倍高。「愈…便愈…」這關係並不能推導出比例性，或者用較現代的字眼來說，並不是每個單調函數必是線性的。新石器時代的祖宗們恐怕不太關心什麼是單調函數，但由於經驗，直覺，思考，他們自覺的或不自覺的學到了比例的觀念。

能辨別某種特性而把它定義出來，並不是什麼大成就。由許多觀察推出一條通用的法則來，卻可算是一項科學上的發現。法則能用的範圍愈廣，其意義也愈重大。能說出一畝地餵飽半村子人則兩畝地可餵飽一村子人，頂多只適用於某些田地和某些村落。「一隻青蛙一張嘴，兩個眼睛四條腿；兩隻青蛙兩張嘴……」頂多不過閒話了一下青蛙罷了。但在這過程中，總有幾個好管閒事的聰明人看出了苗頭而覺悟出：兩個成比例的量不論如何變化，他們的比恆爲一常數。

當然這中間還有許多過渡階段，例如發現和，差，乘積和比率；或轉換「兩鳥加兩鳥得四鳥」爲「二加二得四」之類的抽要過程。但是邁向 π 的決定性的一大步乃是發現成比例的量之間，有不變的比率。從

這裏到發現π便只是侏儒之步了。有人發現圓周與直徑是兩個成比例的量，則對於所有的圓，圓周與直徑之間的比率皆爲一樣的常數了。這個圓的常數一直到了十八世紀才以π來表示，所以π的定義是

$$\pi=\frac{C}{D} \tag{1}$$

其中C爲任何圓的周長，而D爲它的直徑長。

我們以上臆測的過程已經達到約西元前兩千年，相當於數學有文字歷史的黎明時期。由當時的記載可知巴比侖人和埃及人至少已經知道如(1)所表示的π常數的存在和其意義。巴比侖人和埃及人不僅僅知道π的存在，他們還找出了它的略值。在大約紀元前兩千年時，巴比侖人得到

$$\pi=3\frac{1}{8} \tag{2}$$

而埃及人則用

$$\pi=4\times\left(\frac{8}{9}\right)^2 \tag{3}$$

究竟古人怎麼得到這類值呢？雖然沒人能肯定的回答，但卻不難猜測了。

最簡易的方法便是拿一個圓來量它的圓周和直徑，再求得兩數之比。讓我們就這樣來做做，假想我們是在紀元前三千年的埃及，沒有國家標準局，沒有刻了度的量尺，不能用十進位，或阿拉伯數字，沒有除法，沒有圓規，鉛筆或紙。所有的只是棍子，繩子和尼羅河的沙地，於是我們在尼羅河岸平坦的沙地上，用棍子和繩子畫了一個圓。取一根繩子丈量出直徑的長，用它做基本單位。沿著圓周來看看究竟直徑的長要走幾趟才能圍繞圓一圈，實驗的結果得三次加一點點。假如我們不管那一點點，就得到最接近的整數

$$\pi=3 \tag{4}$$

爲了改進我們的近似值，我們得再算一下剩下來的那一點點佔單位長度的若干。這回比的結果可知在 1/7 到 1/8 之間，因此這第二個近似值便是

$$3\frac{1}{8}<\pi<3\frac{1}{7} \tag{5}$$

實際上這些值了，3(1/7)，3(1/8) 都在古籍中經常出現。例如，在舊約聖經中（列王紀上，七章二十三節和歷代志下，四章二節），我們可以找到這樣一段話：

「他又鑄一個銅海，樣式是圓的，高五肘，徑十肘圍三十肘。」

因此聖經裏π的值爲 3 。我們可以很保險的說，用原始裝備來直接測量π是導不出比(5)更好的值了。自此以後，人們得仰仗智慧而非繩子，或沙地上的棍子了。就是依憑智慧而非實驗性的測量，人找出了圓的面積來。

古人有算圓面積的法則，但我們不知道法則是怎麼來的。我們又得再來一次「假如你只有他們的知識，你怎麼做」的把戲，我們知道圓面積是

$$A=\pi r^2 \tag{6}$$

其中r是圓的半徑。學了微積分的人便知道(6)式是很容易導出來的。但遠在微積分發明前五千年，人怎麼算圓面積呢？

他們大概用重組的方法，他們算出長乘寬得長方形面積。爲求平行四邊形面積，可以用重組法將平行四邊形截長補短湊成長方形，因此得平行四邊形面積是底乘高。讓我們用這種重組的觀念，如圖一，把一個圓形變爲等面積的平行四邊形。我們仍然用棍子在沙地上畫圖，但這回只是幫助我們的思考，而非做實際的測量。

我們先把一個圓切成四個等分，如圖一 (a)，然後將他們排成圖一 (b)。下一步，我們將等分之間的空缺塡個相等大小的部分。 所得的奇形怪狀有那麼一點像個平行四邊形。 這個圓形沿着一邊圓弧而量的長，等於原來圓的圓周長，$2\pi r$。圖形的面積正是兩倍原來圓的面積。假如我們把圓切成更多份，則如圖一

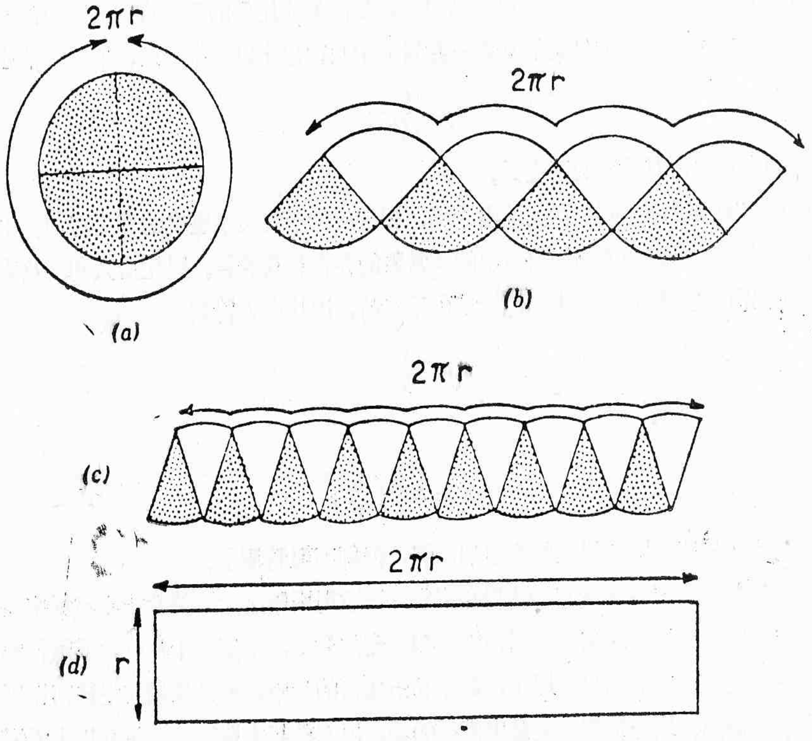


圖 一

(c) 的冒牌平行四邊形會更像平行四邊形；而圓的面積仍舊是冒牌平行四邊形面積之半。繼續這個方法，將圓切成更多的小塊，則由每塊的小圓弧合起來的邊變得和一根直線一般，而冒牌平行四邊形也就變成眞正的平行四邊形（長方形），其邊爲 $2\pi r$ 和 r。於是得圓的面積爲

$$A=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times r=\pi r^2 \tag{7}$$

利那多・達文西在十六世紀就是用這種方法求得圓面積。因爲這時期的歐洲，在將近一千五百年羅馬帝國和羅馬教會的摧殘下，數學程度與古代米索不達米亞人不相上下。因此，極可能這就是古代人算圓面積的方法。

第二節　環帶區

人類並不是唯一懂得使用工具的動物，猩猩和其他猿類（甚至一些鳥類）也能。只要人類停留在獵者的地步，無毛猿和有毛猿之間並沒有什麼大了不起的差別，但約略在紀元前一萬年，無毛猿學會了耕稼和馴獸；由此，他有了革命性的成就：人類社會能夠出產遠過生存所必需的食物，因此可以空出一部分人，從事和食物居住不直接相干的活動。

這個偉大的農業革命，最早發生在地理環境適當的地方：不在北方，那兒冬天太冷太長、農作的環境通常十分惡劣；也不在熱帶，那兒食物充裕，不須衣着，居住地方易得，因此並不迫切需要改進；而是在中央的環帶區，這兒的情況並不令人非常滿意以致有求變的壓力，但又不過份惡到阻礙農耕畜牧。

中央環帶區由地中海延伸到太平洋。大革命先發生在米索不達米亞的大河谷區；後來從埃及經波斯和印度伸展到中國。國家形成了，專業的人出現了，包括軍人、僧侶、執政者、商人、工匠、教書的，以及數學家。

既然米索不達米亞是環帶區中第一個發生農業革命，第一個新社會生根的區域，自不免揣測巴比侖的數學應是最早最進步的，事實上也正如此。較早一些記載數學歷史的文件都推許埃及人爲數學的創始人，但這只是因爲以前找到的埃及文件比其他地方多而且時間上較古老。近幾十年來的研究已改正了這一點，

而且我們發現米索不達米亞所用的π值比埃及來得準確些。

1936 年在巴比侖城附近 200 哩的地方掘出一塊碑。碑上的文字直到 1950 年才部分譯出。碑上主要是各種幾何圖形，並記載了一個正六邊形的周界與其外接圓的周長之比，用現代符號來寫相當於 $57/60+36/(60)^2$（巴比侖人使用六十進位制）。巴比侖人自然知道正六邊形的周界正是六倍其外接圓的半徑。實際上，這顯然是他們定圓爲 360 度的原因，而我們至今仍舊延用這個數。因此，這個碑上列出 $6r/c$ 的比值，其中 r 與 c 各爲外接圓的半徑和圓周。我們可以導出

$$\frac{3}{\pi}=\frac{57}{60}+\frac{36}{60^2}$$

則

$$\pi=3(1/8)$$

與我們前一章中所提到的小小實驗相吻合。

有關埃及數學，我們所知的遠比古希臘時期之前的其他數學來得多些，這是因爲古埃及象形文字的秘密遠比其他文化早被揭開。1799年，拿破崙遠征埃及時，在亞歷山大港附近羅塞達地方發現了一塊三種文字的石板，即是所謂的羅塞達石板。板上記有希臘文，埃及象形文及簡體文。因爲希臘文是流通的，因此埃及文字得以推考。

有關數學的最古老的埃及文獻，或者更正確的說，現存全世界最古老的數學文獻是一卷紙草，名爲萊德紙草或埃門司紙草。它是在底比斯城荒廢建築中的一個房間裏找到的，1858年由蘇格蘭古董商人亨利・萊德在尼羅河岸的小鎮上買得，埃門司紙草包含有道題目及解答，但通常並沒有說明得到這些解答，這部紙草是早期典籍的一部鈔本。開場白說：

> 「精確的思考乃了解所有現存事物和所有隱晦秘密的不二法門。此部鈔於33年，洪水之後的第 4 月，時維萬歲上下埃及王埃尤舍列。鈔自上下埃及王尼麻特列時之古作。文鈔公埃門司謹鈔」。

根據埃及古物學者之說，埃門司鈔書於紀元前 1650 年。尼麻特列王則在位年代在紀元前 2000 年到 1800 年之間。

紙草中第 50 道題裡，埃門司假設了直徑爲 9 的圓面積同於邊長 8 的正方形面積。由圓面積 $A=\pi r^2$ 可推得

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2=8^2$$

因此埃及的π值爲 $4\times(8/9)^2$，略遜於米索不達米亞的 3 又 1/8。埃及人怎麼得到這個蹩扭的值呢？埃門司在第 48 道題中暗示了一下。這回拿一個圓和其外切正方形來比較。埃門司將邊長爲 9 的正方形每邊分成三等分，在正方形的四個角處切成三角形，如圖二所示。這個八邊形 $ABCDEFGH$ 與圓的面積相去無幾，其值爲五個陰影正方形的面積加上四角的四個三角形面積。八邊形的面積得 63，近似於 64 或 8^2。

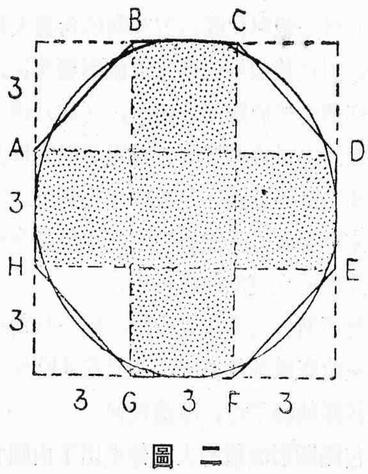


圖 二

因此直徑爲 9 的圓的面積近似於邊長爲 8 的正方形面積。埃門司要了兩回賴，頭一次設圓面積等於八邊形面積，第二次設 63 爲 64。然而值得注意的是，這兩回賴有截盈補缺之效，互相抵消了一些錯誤。

印度河谷的農業革命大約與尼羅河谷和兩河流域在相同時期發生。印度數學之所以看來落後於巴比倫，埃及和希臘，很可能是歸咎於我們對印度古史的無知。印度數學的發展有許多間接的證據，他們早在畢達哥拉斯誕生之前已知道畢氏定理，此外，也有許多證據顯示印度的天文學有相當高水準的成就，但所有的直接記載都已湮滅。最早的文獻要算太陽系統，出版於紀元 400 年前後，雖然所記載的知識更久遠些。

太陽系統中的一册，出於紀元 380 年，使用

$$\pi=3\frac{177}{1250}=3.1416$$

阿羅波多在他的全集中也敍述了一些早期的印度知識。該書出版紀元 499 年，列出許多題目的答案，而通常不提答案怎麼來的，其中一段話是:

「加 4 於 100，乘之以 8，再加 62,000。其結果相近於直徑爲 20,000 的圓的周長。」

由此可得

$$\pi=62,832/20,000=3.1416$$

同於太陽系統中的值。

第三節　四個希臘人

現在讓我們回到地中海的東岸，這兒人類的歷史因古代希臘人而有過幾個輝煌的世紀。這時期的黃金時代便是亞歷山大大學的時代。即使羅馬人後來毀了這個學術重鎮，焚燒其圖書館，亞歷山大城人的光芒仍閃耀了幾個世紀。數學反映社會的盛衰；亞歷山大以前的時期在數學上是個多采多姿的人物與重要發現交織的時代。而 π 的歷史牽涉到這時期的四個希臘人：亞拿薩哥拉，安提馮，希波克拉底，希皮雅。

亞拿薩哥拉（西元前 500-428）是克拉宙米那地方的人，他發現雅典有自由探討的無畏風氣，乃欣然參與，對從事實驗與科學普及化的活動毫不後人，這兩點都和後期希臘哲學家的諂上驕下截然不同。他認爲：尼羅河一年一度的水漲乃由於上游附近的山頂溶雪；月光完全得自日照；月蝕或日蝕的形成乃是因爲地球或月球置於中間；太陽是個紅熱的石頭，大過整個伯羅奔尼撒半島；還有一些其他（較不成功）的理論，但是他的太陽理論否定了太陽的神性，未免太離當時之譜了，有一段時間因不敬神而鋃鐺入獄。

在獄中時他嘗試去解一個與 π 密切相干的問題──「方圓問題」，即作一個正方形使其面積等於一已知圓的面積。根據希臘傳記作家蒲魯塔克（西元 46?-120?）的記載，這似乎是最早提到這個有名的問題的場合。這個令許多人著迷的題目直到 1882 年才證明出光使用希臘幾何是不可能做出來的，但直到今天還有許多不信數學證明的業餘仁兄仍孜孜不倦的去化圓爲方。

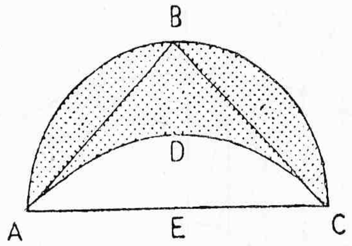
這個時期（西元前五世紀的後期）另一個與化圓爲方有關的希臘人便是雄辯派哲學家安提馮。他創出「窮盡法」(principle of exhaustion)，對往後數學家尋求 π 值影響深遠，他的窮盡法說：先作一個內接於圓的正方形，以後每一步加倍邊數，作個內接於圓的多邊形，（如八邊形，十六邊形等等），直到窮盡此爲圓，則最後可作成一個多邊形，邊長短得以致貼於圓。這點使得安提馮相信希臘幾何足以化圓爲方：因每一個正多邊形可化爲方，而最終的多邊形等於圓，是故也可化爲方。

安提馮的窮盡法幾乎是對的，後來經歐幾里得較嚴整的表示法便全然正確了：根據後者，內接多邊形的面積與圓面積之間的差可以逼近得比任何先定的值來得小。

這時期另一個與圓面積有關的人是巧斯島人希波克拉底，同一時期另有一大大有名的醫生卡斯人希波克拉底，切不可混淆。巧斯島的希波克拉底原是個商人，西元前 430 年到了雅典。一說是他在拜占庭被詐了錢財，另一說是他遭海盜搶刼，但終歸他轉了行，改讀幾何。

希波克拉特顯然是最早求出曲線包圍圖形面積的人，他求出了由圓弧所夾的面積。希波克拉底所能化

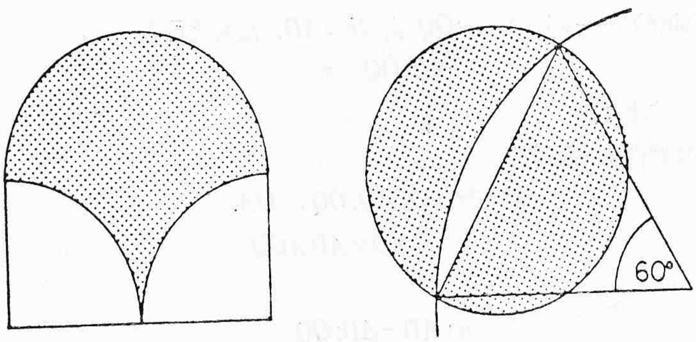
之為方形的乃是一個由外接於等邊直角三角形 ABC 的圓弧 ABC 和另一個圓弧 ADC 所夾的新月形（或稱弓形），其中 ADC 弧相似於 AB 弧，亦卽 ADC 之圓半徑與 AC 之比正是半徑 EA 與 AB 之比，參看圖三。希伯克拉底證出弓形的面積正巧是三角形 ABC 的面積，讀者試證之。



圖三　希伯克拉底弓形

希伯克拉底所著的幾何書已經失傳。有關這個定理，後人歐多薩斯所給且由一世紀之後歐幾里得所承繼的證法便是歸謬證法。極有可能，希伯克拉底是最先用這種證明方法的人。這個證明方法大致上如下：為了證明某句話是眞，我們先假設其為假，然後導出荒謬的結論(或與假設相違的結論)；旣然結論是荒謬的，且證明的過程一步步皆對，追本溯源，出毛病的一定是在我們的假設，因此最先的那句話非眞不可。

希波克拉底的發現可以很容易的推廣到一些其他的曲線圖形上，圖四中是兩個例子。尤其右邊的一個形狀必然給化圓為方的問題帶來不少希望，我們今天回顧，自然知道問題的癥結在於只有某些弓形是可以化為方形，但並非所有的弓形都可以。右邊的形狀中，弓形與半圓形之和可以化為方形，但兩者分開之後並不能個別化為方形，至少沒法依下章要提到的希臘人的基本規則來化。

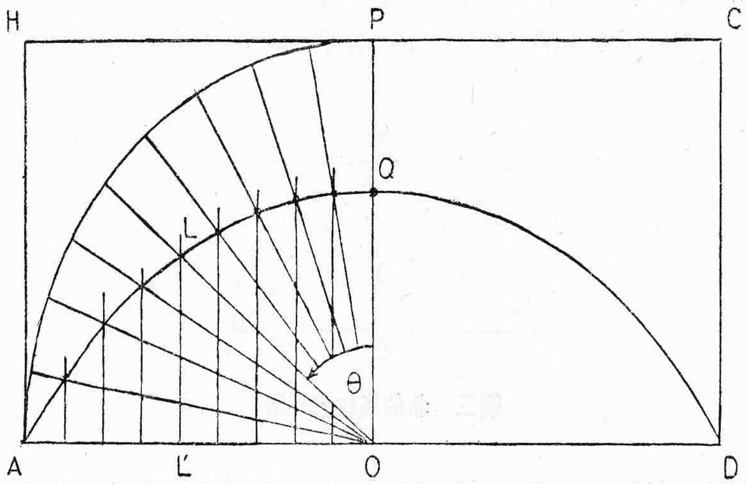


圖四　兩個可依歐氏幾何的規則化為方形的例子。有點的部份可化為波克拉底弓形，因此可再化為方形。

第四個要提到的希臘人是希皮雅，依力斯地方人，紀元前五世紀的後半葉來到雅典。希皮雅是有記錄以來第一個定義了直線與圓之外的曲線的人。出乎意料之外的是這個清單上的下一個曲線竟是一個超越曲線，一步躍過其中無限多個代數曲線。但當時的希臘人還不知道曲線的度數，因此有什麼便用什麼。希皮雅發現的曲線稱為三分線 (trisectrix)，因為它可以用來三等分一角（第二個風靡古人的題目，第三個題目是加倍正立方形的體積），或稱為四方線 (quadratrix)，因為它可以用以化圓為方。我們說過方圓問題不可能解的，但這曲線可以用來化圓為方，而且只用直尺和圓規，這中間當然有漏洞，漏洞便出在過程中違反了希臘幾何的規矩。

希皮雅的曲線定義如下：假設 AB 線段，如圖五中所示以等速移向 CD，同時有 AO 線段依順時針方向以等角速繞 O 點旋轉，兩線段交點 L 的軌跡曲線便是希皮雅的四方線。只用直尺圓規我們可以將角 AOP 分為 2^n 等份，線段 AO 分為同樣等分，其中 n 為任意數，任意兩個對應線段的交點便是四方線上

的一點。因此我們縱然不管時間與運動的觀念，仍可以作出這曲線。



圖五　希皮雅的四方線

我們不知道希皮雅是否曉得他的曲線可以用來化圓爲方；或者他曉得而無法證出。三世紀後期的帕伯斯給了一個證明，他的證法是歸謬法：

設 $OL=\rho$ 而 $OA=r$。由四方線的定義，並將旋轉表成弧度，則

$$\frac{AL'}{\pi/2-\theta}=\frac{2r}{\pi}=\text{常數}$$

但 $AL'=r-\rho\sin\theta$，因此

$$2r=\pi\rho(\sin\theta)/\theta$$

若令 $\theta\longrightarrow 0$ 則 $(\sin\theta)/\theta\longrightarrow 1$，$\rho\longrightarrow OQ$ 而 $2r=AD$，故前式可得

$$AD:OQ=\pi$$

因此我們有了一個幾何方法求 π。

假如要化圓爲方，我們得有一個線段

$$\begin{aligned}u&=2\pi r=2(AD:OQ)\times OA\\&=(AD\times AD):OQ\end{aligned}$$

或

$$u:AD=AD:OQ$$

因此 u 可以很容易作出。若一長方形的邊爲 $u/2$ 和 r，則其面積便是 πr^2。由於長方形可以很容易化成方形，我們的過程便可將圓化爲等面積的正方形，只用了直尺與圓規。然而，這過程中違反了希臘幾何的一些基本規則。

第四節　歐幾里得

歐幾里得的出生地點和日期已失詳，所以現今都稱他爲「亞歷山大的歐幾里得」。他所作的原本是所有教科書中最暢銷的。僅自十五世紀文字印刷發明以來已經印行了上千版本，而這册書在 2250 年後的今天仍然銷行不已（尤其是幾乎所有學校的幾何書都只是該書的改頭換面而已）。原本的大部分也許在歐幾里得之前便已知曉。但他的成就最主要不在書中定理說了些什麼，而在書中所舖述的方法。原本是數學第一起富麗堂皇的宮殿。它的五塊基石，或者說五個假設，（歐幾里得認爲）是如此簡單，任何人都能同意。歐幾里得再以鐵的邏輯一磚復一磚，直到最後整個宮殿堅牢地聳立在基礎之上。歐幾里得不是幾何學之父，他是數學嚴謹性的開山祖師。

原本共有十二册，全世界中學所教授的初等幾何大體上相當於前四册。除了少許幾個基本定理之外，歐幾里得幾何對於現代科學和工程實無大用：三角學與解析幾何通常更深入更有效得多。歐氏幾何的眞正價值在它對邏輯思考的教誨。

以方圓問題爲例，如何作一個方形其面積等於一已知圓的面積。當時並沒有個委員會來限定化圖爲方的條件。但由歐幾里得蓋宮殿的方法我們可以揣摩出希臘人究竟想要什麼。這個問題是：

(1)化圓爲方，

(2)只用直尺與圓規，

(3)在有限步驟之內完成。

因此我們知道希皮雅的方圓法爲什麼不合格了。根據圖六可知Q點只能沿著L的軌跡用曲線板求得，這一來違反了第二條，或者用直尺圓規求出無限多個L點來，那便違反了第三條。

至於爲什麼限定只能用直尺與圓規作圖，歷年來困惑了許多人。有人歸諉於希臘人的美學和柏拉圖與亞里士多德的影響。其實希臘數學家只執迷於眞理與邏輯。直尺與圓規只是湊巧而來的，與美學是風馬牛不相及的。歐幾里得的宮殿築於五塊簡而易明的磐石上：

一、自任意點至任意其他點可作一直線。

二、一有限直線可以沿一直線方向不斷延長。

三、以任意一點爲中心，任意長度作半徑可作一圓。

四、所有的直角都相等。

第五條假設說來煞費周章，大概的意思如下所述（與歐幾里得所用的不同，他的公理中不含「平行」的觀念）：

五、給一線和一不在該線上的點，頂多可作一條線穿過所給的點而平行於所給的線。

對於希臘人而言，證明一件事(譬如證明某一作圖滿足某一條件)的意思便是：將它一步步分解演化成以上五個公理，也就是使得這件事如這些公理般的簡而易明。我們可以很容易地看出，歐幾里得的五個公理代表一些最基本的幾何作圖，件件可由直尺與圓規作出。（直尺與圓規乃是由這些本相應而生的末。）如果一個作圖超乎直尺或圓規之外，例如用了曲線板，它便不可能化解成爲歐幾里得的公理了，因此，在希臘人的眼中便不可得證。這才是希臘人限定只用直尺與圓規的眞正原因。

希皮雅化圓爲方的作圖法不能化解爲這些公理。但這並不是說他的作圖是錯的。在1882年林德曼證出方圓問題（或者數值的幾何作法）不可能化解到歐幾里得的五個公理的。

第五節　阿基米德

當牛頓說「如果我看得比別人遠，是因爲我站在巨人的肩頭」的時候，他心目中的巨人必定有一個是西拉鳩斯人阿基米德，古代最傑出的數學家，物理學家和工程師。

他的生平不大爲人所知。大約西元前年生於西拉鳩斯，是天文家菲廸阿斯之子，一生大部分時間住在西拉鳩斯。他遊學於亞歷山大大學，可能是歐幾里得繼承人的學生，甚或可能直接受教於歐幾里得。他是西拉鳩斯王海厄洛二世的親戚及朋友。他爲國王設計許多種打仗用的機械來抵抗羅馬人的進襲，他也因爲檢定王冠的含金量而發現了浮力的原理。

他所著的論浮體一書內容遠超過現在所謂的阿基米德原理，還包括了浮力與穩定性的難題。同樣的，論平面的均衡內容不僅是槓桿原理還解答了一些，例如「找出了拋物線段的重心」的難題。在這些及所有其他的研究中，阿基米德使用了歐幾里得的方法：由一組簡單的假設，以不容置疑的邏輯，推演出他的結論。他的作品始終融合著數學與物理，因此阿基米德成爲物理科學之父。

阿基米德也是第一個講科學的工程師，他不斷地尋求一般性的原則而用於特殊的工程問題上。他應用槓桿原理於戰爭工事來保衞西拉鳩斯的事蹟已是家喻戶曉了；但他也用同一個原理，根據一個奇妙的平衡

法找出部分球體的體積。（請參閱數學傳播第二卷第二期李宗元，古學理文）。他用相同的方法求出了其他廻轉體的體積（橢球，廻轉拋物面，廻轉雙曲面），並找出半圓和半球的重心。不曉得有多少阿基米德的作品是失傳了的(最重要作品之一的方法直到1906年才發現)，但他的現存著書，包括論螺線，論圓的測量，拋物面積，論劈曲面與球體，論球與圓柱，定理及其他一些書，古人中沒有可以望其項背的。

這些書不僅充滿了妙絕的結果，也顯示阿基米德是講求方法的先驅者。他由「等于」邁入「任意趨近于」(arbitrarily close to) 的觀念（歐幾里得曾提過這個觀念，但不曾有效地使用過），因此已達到了微分觀念的門檻。

他也是第一個提出計算到任意精確度的方法的人。他的方法的基本觀念是內接一個圓的正多邊形周界小於此圓的圓周，而外切於同一圓的相似多邊形則周界要大於圓周。只要使得多邊形的邊數足夠大，則兩個多邊形的周界便一個由上，一個由下地任意趨近于圓周。阿基米德先用正六邊形，以後逐次加倍邊數，到了九十六邊形時，得

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

亦即

$$3.14084<\pi<3.142858 \tag{8}$$

在不使用三角學和十進位數字符號之下阿基米德能得到這種結果，十足顯示了他的毅力。

假設一圓半徑為 r，則內接於圓的正 n 邊形一邊之長為

$$i=2r\sin\theta$$

其中 $\theta=\frac{\pi}{n}$ 為此 n 邊形一邊所對圓心角之半；而外切於同圓的正 n 邊形一邊之長則為

$$c=2r\tan\theta$$

因此，圓周 C 可得

$$ni<C<nc \tag{9}$$

或除以 $2r$ 後得

$$n\sin\theta<\pi<n\tan\theta \tag{10}$$

若將原來邊數 n 加倍 k 次，則

$$2^kn\sin(\theta/2^k)<\pi<2^kn\tan(\theta/2^k) \tag{11}$$

當 k 足夠大時，上下限便可任意趨近于 π 了，

阿基米德自然是不曾用三角函整，但當 $n=6$ 時，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ 與 $\tan\theta=\sqrt{1/3}$ 可由畢氏定理求出，而(11)式中其餘的函數可由半角公式求得（相當於求直角三角形的線段比例）。當 $k=4$ 時，兩個多邊形便有96邊，所得的上下限值便是(8)式，但過程中必須將半角公式中的平方根代以近似的有理數值。

我們以近代的符號來表示半角公式中的平方根值要比不用三角學又不用十進位數方便許多。所以我們將以近代符號來看看阿基米德的運算過程。阿基米德的方法相當於使用以下兩個半角公式:

$$\cot(\theta/2)=\cot\theta+\csc\theta$$

$$\csc^2(\theta/2)=1+\cot^2(\theta/2)$$

因此，由 $\cot\theta$ 和 $\csc\theta$ 可求出 $\cot\theta/2$ 和 $\csc\theta/2$。對於六邊形而言，阿基米德取 265/153 為 $\sqrt{3}$ 的近似值，到了十二邊形時他已必須求出 $\sqrt{349450}:153$ 的值，阿基米德將之化簡為 $591\frac{1}{8}:153$。最後的 96 邊形牽涉到一個極大數的平方根，若以十進位表示，這極大數超過十億！他怎麼能在沒有方便的符號下求平方根到這樣的精確度，至今仍是一個謎。

但看來阿基米德的成就不僅止於此。亞歷山大人布朗在他的書度量中（著于西元 60 年左右，但直到 1896 年才給發現）提到一項阿基米現在已失傳的成果，他指出阿基米德求出

$$211875:67441<\pi<u$$

亦即 $$3.14163<\pi<u$$

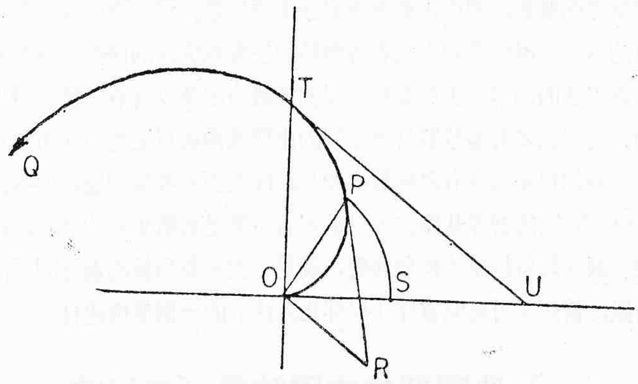
其中的上限u值，根據 1896 年在君士坦丁堡發現的希朗作品，值爲

$$u=197888:62351=3.17383$$

但顯然記載有誤，因爲這值比阿基米德之前所通用的$3\frac{1}{7}$值還差勁。希朗又記載說：「由於這些數字用在計算上非常不便，乃簡略成較小兩數的比 22:7」。因此，阿基米德至少得到

$$3.14163<\pi<3.14286 \tag{12}$$

此外，阿基米德證明了亞歷山大人康農所發現的曲線，就像希皮雅的四方線一樣，可以用來求圓的面積。這種曲線至今名爲阿基米德螺線，它的定義是當一條半射線沿著一端等速旋轉時，一點沿著半射線以等速運行所留下的平面軌跡，好比蒼蠅在旋轉的唱片上自中心向外爬出所留下的軌跡。



圖六　以阿基米德螺線求圓的面積

設圖六中的 P 點是螺線上的任意點，並令在 P 點的切線交垂直于 OP 的線於R點。在論螺線一書中，阿基米德證明出 OR 線段長等於以 OP 爲半徑的圓上的弧長 PS，而S乃是圓與半射線最起始的位置 OU 的交點。因此，若令 OT 垂直於 OU，則 OU 之長爲以 OT 爲半徑作圓的圓周的$\frac{1}{4}$。所以

$$2OU:OT=\pi \tag{13}$$

而三角形 OTU 的面積則爲

$$\frac{1}{2}OT\times OU=\frac{1}{2}OT\times\frac{1}{2}\pi OT=\frac{1}{4}\pi\times OT^2$$

由此可知，以 OT 爲半徑的圓，其圓周長爲四倍 OTU 三角形的面積。所以我們又一次化圓爲方，但過程違反了希臘幾何，原因與希皮雅四方線同。

以上便是古代最偉大的天才對π的歷史和方圓問題的貢獻。雖然以後的人找出更好的近似值，阿基米得的多邊形法一路所向無敵，直迄十九世紀。