數學的代數化

原著：Samuel Eilenberg
譯者：呂理裕

研究抽象結構的近世代數，正逐漸滲入數學的其他部門。舉個例來說，如果我們一般平面看成一張大桌子的表面，而把「轉動」看成爲以桌子中心爲樞軸的旋轉。像這樣的兩個「轉動」，可以逐一完成。如果先完成轉動M，然後轉動N，其結果，稱爲轉動M與轉動N的合成轉動，以MN表之。合成轉動有三個有趣的性質:

⑴存在一個轉動I（完全不動的轉動）使得對每一轉動M。

$MI=M=IM$。（I將稱爲單位轉動。）

⑵對每一轉動M，有一逆轉動，以 M^{-1} 表之，使得 $MM^{-1}=I$。

⑶轉動的合成滿足結合律，即 $M(NP)=(MN)P$。

這些「轉動」所具有的性質，也發生在其他情況。經由各種不同的例子，代數學家把這些性質抽象化，而得到羣的概念。所謂羣，就是由某些元素組成的集合，集合的元素中有一種合成作用，而合成滿足上面所描述的三個性質。因此，上面所說的轉動便構成一個羣。但是有很多羣卻發生在完全不同的情況。

舉例而言，如果合成是一般所說的加法，所有整數卽形成一羣，而“0”是這羣的單位元素。如果合成是一般所說的乘法，則所有正分數卽形成一羣，而“1”是它的單元素。到現在爲止，上面所考慮的羣，都包含有無限多個元素。下面的例子則是由六個元素組成的一個有限羣。考慮三個數 1,2,3，如果將它們排列，可得到 (1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(3,1,2),(2,3,1) 及 (3,2,1) 六種不同排列。這種排列可以看成三個東西重排後的位置。例如,(2,3,1) 卽把第二個東西放在第一個位置,第三個東西放在第二個位置,第一個東西放在第三個位置。元素的合成，如 (2,3,1) 與 (3,2,1) 合成後，以 (2,3,1)(3,2,1) 表之，這樣的寫法，定義爲先排成 (2,3,1) 的位置，然後再換成 (3,2,1) 的位置。因此,(2,3,1)(3,2,1)=(1,3,2)，而且也很容易可以看出 (1,2,3) 是這羣的單位元素。

如果上面的六個元素，以 $a=(1,2,3)$, $b=(1,3,2)$, $c=(2,1,3)$, $d=(3,1,2)$, $e=(2,3,1)$, $f=(3,2,1)$ 表之，經過合成，可得下面的乘法表:

表 1

	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	d	c	f	e
c	c	e	a	f	b	d
d	d	f	b	e	a	c
e	e	c	f	a	d	b
f	f	d	e	b	c	a

在羣論中，如上面的例子，我們所注意的並不是三個東西排列所形成的羣的那六個元素，而是它們合成作用的乘法表。這也就是代數學家所謂的「把羣看成爲抽象羣」。每一個元素的羣，若是遵從上面的乘法表，我們就視它與三個東西所成的排列羣「同構」。代數學家把同構羣看成爲同一個羣。

將上述例子加以一般化一我們可以考慮n個東西的所有排列法所形成的羣。這樣的羣叫做對稱羣，是有限羣中最簡單的例子。當然，還有其他許多不同的羣。

乍看之下，我們會以爲有限羣是最容易學習的羣，但是並非如此。事實上，代數學中某些最困難而尚未解決的問題，是與有限羣的理論有關聯的。例如，外表上看起來很簡單的問題「具有n個元素的羣有幾種?」，這句話當然是指，「有多少包含n個元素而不同構的羣? 」。對某些n值而言，答案相當簡單。比如說$n=5$，只有一個羣包含有五個元素。這個羣可以看成平面旋轉 $0°, 72°, 144°, 216°$ 及 $288°$ 所形成的羣。如果n是質數，這個結論，也是眞確的。當n不是質數;這個問題仍然沒有完全解決。幾年前，大多數代數學家，覺得不可能在這一代裡解決這個問題。今天，由於芝加哥大學的 John Thompson 在有限羣理論上的重大突破，專家們感覺到有些希望了。

談到羣論的起源，則須回到代數上一個古典的問題，卽解代數方程式。古代的巴比倫人便已知道如何解決某些二次方程式。文藝復興期間，義大利的代數學家也發現了解決三次及四次方程式的公式，如解

$$x^3-2x^2+5x+10=0 \text{ 或 } x^4+7x^3+x^2-6x-2=0。$$

然而，尋找一個公式來解決五次或更高次方程式卻沒有成功。十九世紀初期，年輕的挪威天才 Abel。證明了這樣的公式是不存在的。不久之後，一個更年輕的法國人 Galois，找到了一個方法，足以判別那些方程式可經由含根式的公式，予以解決。這個問題的解決關鍵是羣的概念與其性質。

羣論代數學的一個重要部分。它的應用遍及數學的大部分枝，與結晶學、理論物理等其他領域。提出羣的概念是代數學發展史上重要的轉捩點。

環和體的概念幾乎與羣同等重要是從研究數的性質而發展出來的。數有二種合成作用 —— 加法和乘法，而這二種合成作用所擁有的性質卽引出環、體的抽象概念。環是數或其他元素的集合，可以像一般數一樣做乘法或加法。但對非零元素的除法則不作要求。例如，整數形成一環。體是數或其他可加、乘而滿足一般算術中除了大小以外所有的性質的元素所成的集合。例如，有理數形成一體，實數及複數也形成一體，而所有形如 $a+\sqrt{2}$的集合，也形成一體此處 a, b 是有理數。有限個元素的體也存在。例如，對 $0, 1, 2$ 三個數，定義加法和乘法，使得它們滿足下面的加法表及乘法表:

表 2

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

則 $0, 1, 2$, 三個元素的集合卽形成一有限體。有限體對其他數學的重要性，在過去十年裏大大的提高了。

傳統上把數學分成幾何、代數和分析三個大分枝。代數和分析研究的是與數、函數及方程式有關的東西。它們之間的主要區別是代數研究的東西是有限的而分析研究的東西可能涉及極限。隨着數學的發展，幾何學逐漸分化，其中一部分與代數結合，另一部分與分析結合。正在這時，產生了一個幾何的新枝——拓樸學，它與代數（事實上，拓樸學中有一大部分是叫做代數拓樸學的）及分析均有密切關係。這些部門的界線尚不清楚，它們的面貌也正隨着新的研究結果而改變。然而卻有一件事變得非常淸楚而且普遍地被人接受，卽「數學的每一分枝，不論它是什麼，總有它的代數部分」。下面幾頁卽試圖就這一現象，加以闡說。

舉例而言，讓我們考慮一家鐵路公司。最簡單的鐵路公司是在 A, B 兩點之間提供服務。從A到B只有一單軌而且只有一部火車行駛，停留的時間長得足夠卸貨，裝貨，然後再回到A點。現在，拿這樣的公司來跟一個具有複雜時間表、各種不同等級車廂以及號誌、轉轍器等裝置的大鐵路網的操作來比較。基

本上來說，它們有相同的東西，即由火車頭在鐵道上去輸送旅客和運送貨物。而這由於大小和錯綜複雜所添加上的新東西可以叫作「鐵路的代數」。同樣地，一個剛成立的電話公司，可能只有二個訂戶，而由一條電話線連接它們。一個大鐵路網的某些問題與一個大電話公司的某些問題可能十分相像，與大城市區的交通管制問題也可能十分相像。解決其中某一問題的數學方法可能也可以用來解決別的問題。這些數學或代數方法可能早已有了，這時，我們說這是某種代數理論的新應用。也可能我們須要發展一些新的代數以便解決上述的問題。當然，也很可能須要發展一些分析或者微分方程才能解決問題。

最足以說明代數學的伸展性的便是數學了。我們常聽人說，數學愈來愈代數化了。代數與數學的關係常被比擬爲數學與科學的關係。流體力學描述着極爲複雜的自然現象，它的數學模型是一些偏微分方程的解。

這模型忽視了許多流體的重要性質。它把問題過份簡化了，以致有若干失眞的感覺。但也由於過度簡化，我們才可經由數學方法來處理，而且也因爲它能正確地反映一些物理實況，使我們能得到一些重要的結論。

同樣地，將某些數學代數化常常是得把所要研究的數學作一個極度的簡化以便集中精力，討論它的數學性質，這樣子我們才可能應用代數知識去研究別的數學知識。

例如，考慮一個充滿液體的球形容器。假設液體的移動是平滑的。根據拓樸學的一個基本定理「定點定理」可知至少有一液體質點將停留在它原來的位置。現在我們可以考慮其他形狀的容器，問有多質點將停留在它原來的位置？回答這個問題，需要若干代數拓樸學的知識。在此我不預備詳細說明，我只指出，容器的形狀和液體質點的移動性質可以由幾個數所決定。而用這些數，我們可以計算出有多少質點最後將停留在它原來的位置。這個公式就是有名的“Lefschetz 定點公式”，是普林斯頓的 S. Lefschetz 發現的。最近在 Lefschetz 定理的推廣上有了若干驚人的結果，它與微分方程拉上了關係。

截至目前爲止，我們把代數描述爲數學的一部分，而被其他數學領域和非數學領域拿來應用。然而這只不過是片面之見。事實上代數學的許多分枝都是龐大而古老的，在自己領域內提出問題，啓發靈感。許多代數專家在自己建立的代數領域內工作。其他的，像作者，完全是基於需要，迫使他們從其他領域進入代數。他們把代數看成一種便利的結構和語言，藉着它們，可以使得其他的數學更容易被了解。假如在這樣的過程中，必須找尋新的代數方法，（通常是這樣的），那就更好。因爲我們可以目睹新的子域「某某代數」的創造。例如，「同調代數」便是這樣創造出來的。

與同調代數最相關的理論就是範疇和函子。範疇是一些物體 A, B, C 等和這些物體間的「箭頭」，如 $A \xrightarrow{f} B$，$C \xrightarrow{h} D$ 等組成的。兩個連續的箭頭 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 可被合成爲 $A \xrightarrow{gf} C$，而其合成滿足結合律。對每一物體 A，有一單位箭頭 $A \xrightarrow{1_A} A$，這一箭頭與其他箭頭合成後，並不改變它。函子僅僅是從一範疇轉移到另一範疇的方法。在各種不同數學科目裏，有許多範疇和函子的例子。範疇和函子的理論是一種眞正能表明和研究數學結構上某些共同特徵的方法。

這些理論的基本定義和內容是如此的簡單以致它的理論似乎不像是可以影響某些方面。然而，在這定義僅僅下了二十五年之後，在近代數學的許多發展中都有它的形跡。有時它僅對組織形式有幫助，但是它的貢獻經常是更加實際的。範疇理論一個最近的應用是在自動化理論，計算機語言和抽象的語言學上。有許多的理由相信，這些理論將由於範疇理論的應用徹底地改變。

——本文作者現任敎於中央大學數學系