

# 認識數學遊戲

曹亮吉

或許你對數學遊戲有點接觸，但你能說得明白數學遊戲是什麼嗎？既然冠上「遊戲」兩字，它當然和課堂裏所授的「正統」數學有別。那麼正統數學是什麼？數學遊戲又是什麼？

最簡單的看法說數學就是研究數與形的科學。這是就內容來對數學加以規範。在此旗幟之下，數學遊戲當然也包括在內。

數學遊戲是什麼？我們還是從名稱着手，或許能把它點出來。數學遊戲或稱趣味數學或稱消遣數學，所以它是以遊戲的形態出現，使人覺得有趣，因此消而遣之。但這樣還不能使數學遊戲的特色突出，因為有人認為數學本身都是遊戲：先講好一些規則，然後按照規則來玩，但若問數學就是遊戲嗎？我們一定會猶疑，一定覺得除遊戲成分之外，課堂裏的數學還講求嚴謹的建構。更有人認為數學不應該看成遊戲，本質上，它是人類研究外界一些關係到數與形的問題而產生的。這些看法，或從形式出發或從應用出發，並不一定相衝突。讓我做個調人，把數學概述如下：就數學的全體看來，內容上它研究的是數與形，形式上它是建構嚴謹的遊戲，實用上它不但能幫着解決外界所引起的數與形的問題，而且在嚴謹的遊戲中使我們滿足了求知欲、娛樂心，培養了思考推理的能力及瞭解了數與形的建構秩序。

形式上、實用上都滿足了上面條件的數與形的題材當然是正統數學的一部分，譬如沒有人懷疑微積分是不是正數學。但如果條件差了一些，就見仁見智了。從形式與實用的角度來規範數學遊戲，我覺得它有以下的特色：

- (1)題目簡單易懂且有趣，答案有時也出人意表。
- (2)沒有一套系統性的方法。
- (3)看不出任何直接的應用。
- (4)沒有列入正規的課程。

特色(1)是數學遊戲之所以有趣，值得消遣的要素。沒有特色(1)，恐怕大家都會把它趕到數學遊戲的門牆外。下面兩題算是趣味數學的精選：

$$(一) \quad \frac{EVE}{DID} = \dot{TALK}$$

每個字母代表 0 到 9 中的一個數字。請問那個字母代表那個數字？當然若把原題改成

$$\frac{XYX}{UVU} = \dot{ABCD}$$

题目的解法還是一樣，但韻味就差太遠了。原題妙在簡單易懂而且有趣（夏娃的確說個不停）。

(二)要你的朋友背着你，在一張白紙上寫個 1，在 1 後添幾個 0。要他把所有 0 的遮起來，只剩下前面的 1，才拿給你，你能猜出有幾個 0 嗎？能！只要在 1 前面寫上  $\log$  就成了！這個题目的答案出人意表，也是趣味數學中的佳作。

研究某些問題如果有一套系統性的方法，則這種系統性的方法就可以用來解決更多的問題，終於成了某某學，那麼就不再是數學遊戲了。當然這種判斷的標準很難客觀。譬如平面幾何冥冥之中有一套系統性的方法，而且幾千年來的確也被看做正統數學。可是平面幾何裏有許多希奇古怪的题目，意想不到的補助線；遇到新的题目就要想新的做法。的確，近年來中學課程裏把平面幾何的內容一再縮減，許多漂亮的題材，如歐拉線、九點圓、巴斯卡定理等等都遭到放逐的命運。此外，每一門數學的萌芽時期都是做個案的

研究，都沒有一套系統性的方法，如果研究的對象不因應用而起，則往往可以看做數學遊戲。所以彼一時也，此一時也，是否列入數學遊戲的門牆還要看是不是適逢其時。

研究的對象如果由應用而起，則使人心情緊張，毫無遊戲之心、消遣之情，當然也不能添到數學遊戲之林。通常一題材如果有一套系統性的研究方法，則使人對整個數學會有更進一步的瞭解，這也可以列為該題材的內在的應用性——相對於應用到數學本身以外的外在應用性，即通常所謂的應用性。內外應用性當然也有時間的因素，譬如阿基米得求拋物線下的面積，可以看做一種數學遊戲，可是當你在課堂裏學這一段微積分時，我敢打賭，你怎麼也消遣不起來。

數學遊戲為什麼不能列入正規課程？或反過來問：為什麼列入正規課程的就不是數學遊戲？理由多得呢！最冠冕堂皇的莫過於「遊戲就是遊戲，正規課程是要板着臉的，其實就實用而言，道理最簡單：一列入正規，學了它馬上有應用的價值（分數高啊！），所以情趣盡消，就失去了數學遊戲的資格。再者，反覆學習，新鮮感沒了，變得沒趣，就不能消遣了。記得小學時，學雞兔問題、時鐘問題，熟習到「看了問題就知道答案」的程度，真是味同嚼蠟。可是在外國這類問題不列在課本內，外人初次見到都欣喜若狂，不但摸索着如何求取答案，而且還想到「如果雞狗同籠則……？」！同樣道理，現在的學生在聯考之後，掘出兄姊或父母的老幾何課本，細嚼之下，一定有許多人嘆道：「這些漂亮的東西為什麼在課堂裏學不到？」

我用上面這四種特色把數學遊戲從數學中劃出一塊園地來，一個題材是否有趣比較客觀，是否有其他的三種特性則因時因地因人而有不同。甚至一個枯燥的題材如果適當地表現出來，也許也會變得有趣。所以數學遊戲這塊園地沒有明顯的界限。數字遊戲、方陣、一筆畫、走謎陣、圖形的分割與拼湊、智慧盤、詭理、謬論等等固屬於傳統的數學遊戲，代數、幾何、排列組合、或然率、邏輯、實驗計畫、集合論、拓樸學等較高深學問中的許多輕鬆題材，甚至數字記憶法、對稱、 $e$ 、 $\pi$ 的各種性質、速算法、差分、彈積、二次錐線等等，只要從適當的角度去看也都是數學遊戲的上驕之選。

數學遊戲固然有趣，但它缺乏系統性，沒有應用性，而且也不在正規課程內，那麼我們該去研讀它嗎？歷來大家對這方面的看法很分歧。贊成的說數學遊戲不但有趣，提高求知欲，而且引發許多有用的數學，譬如實驗計畫法用制拉丁方陣，七橋問題、四色問題促成了圖形理論的誕生，費瑪最後問題引起代數數論，古希臘三大幾何難題演變成代數體論等等。所以研讀數學遊戲不但怡情養性，而且可以創造出大學問來。反對的人說學學遊戲的題材絕不是數學的主流，而且它很容易引人入迷，因此使人浪費時間，甚至誤入歧途。這一吵，可就拉出許多沒有仔細想過的問題，如數學遊戲對數學歷史及對個人的影響是什麼，數學遊戲的功用是什麼等等。不錯，拉丁方陣，七橋，四色問題、費瑪問題、幾何難題的研究都分別在實驗計畫、圖形理論、代數數論、代數體論之先，而且都分別屬於這些大學問的範圍之內，但我們沒辦法一口咬定沒有拉丁方陣就不可能發展實驗計畫，沒有七橋四色就沒有圖形理論，沒有費瑪就沒有代數數論，沒有三大難題就沒有代數體論。我想這些大學問不全是這些題目所引發出來的，而且縱使沒有這些題目也會由其他題目引發出來的。可是，我們如果花上時間，研究某些數學遊戲的題目不是也可能引發新的大學問嗎？這太難說了，滄海一粟，大概比中獎還難。此外，數學遊戲當然不是數學的主流。四色問題、費瑪問題經過長期的研究，有了一套研究的方法以後早就被起出數學遊戲的門牆；固然外行人還是把它看成數學遊戲，但他們不懂得前人研究這些問題的方法與結果以及所遭遇到的困難，當然不可能忽然有所創見。所以從歷史的眼光看來贊成研讀數學遊戲的一派算是落了下風。

那麼數學遊戲真的一文不值嗎？反對派也不必太樂，因為答案也是否定的。前面說過實用方面，數學可以幫着解決外界的問題（簡稱外用），瞭解數與形的建構秩序（內用），培養思考推理能力（思考），還可以滿足求知欲（求知）及娛樂心（娛樂）。個人研究某題材後，其掌握外用、瞭解內用加上思考、求知、娛樂所提高的程度除以所花去的時間所得的量我們把它稱為提高率函數（簡稱提函數），它可以用來衡量該題材對個人所發生的作用。一切數學遊戲多少都具有娛樂價值，可是談不上外用。至於其他三種功用就要看作者怎樣出頭、怎樣寫答案，讀者怎樣研讀它了。如果讀者初次知道三大難題，引起了求知欲，開始思考起來，則提函數的數值大，是一件好事。如果沒人告訴他，他也沒有去查這方面兩千年的歷史，

#### 14 數學傳播〔論述類〕

而一味地理頭苦幹，夢想一朝成名，則其提函數的數值變得很小，甚至為 0，正應了浪費時間，誤入歧途的警語。如果由三大難題引起了他對圓規直尺做圖的總檢訂，引導他研讀代數體論，則提函數數值變得很大，更是件好事。

數學遊戲予人的影響可好可壞，且看我們持什麼態度待它。如果純為娛樂，只要不迷之太深，自有其價值。如果想更進一步，則要多看有啟發性的書，做題目時不要一味追求最後的答案而忽略整個過程的原理原則。譬如談魔方陣，拉丁方陣時要討論到對稱及實驗計畫，讀七橋、四色問題時要討論到拓撲性質及有關點、線、面個數間關係的歐拉定理，讀費瑪問題時要討論到代數數論，讀三大難題時要討論到圓規直尺做圖的意義及代數體論。（當然我們希望有更多具啟發性的書本和文章。）如果還想更上一層樓做研究，則已經脫離了數學遊戲的園地。這時候就得多讀書，一方面研討別人怎麼做（值得研究的題目總是有人在做；把精力投在不知是否值得研究的題目，就如買獎券，投資收回的期望值很小。），一方面充實自己的數學知識，磨鍊做研究的工具，才不會有如瞎子拿着鷄刀照着大牛猛砍。

結論很明顯：數學遊戲絕不是數學的主流，但它還是有價值的。它對你是好還是壞，只看你怎麼認識它！

——本文自「科學月刊」轉載，作者現任教於臺大數學系