

孫臏賽馬與分配問題

莫宗堅

「以君之下駟與彼上駟，取君上駟與彼中駟，取君中駟與彼下駟。」——史記

(一)

在廣闊的齊魯秋原上，一羣齊國貴族在講習武事。將軍田忌眉頭微皺，頗不開心。只因適才與齊王賽馬一連三陣，將軍的馬，匹匹敗陣。將軍上陣禦侮，沒匹好馬怎行？「去胡兒地，買匹好馬。」田忌大聲的自言自語。孫臏在旁微笑道：「勝負之數，多算者勝，少算者敗。胡兒良馬何如我胸中謀略。將軍若能用我一言，不難立時轉敗為勝。」田忌大喜：「先生教導我兵法，使我受益良多。田忌願聞良策。」孫臏深察的目光注定在田忌臉上，緩緩的說：「將軍果能採用我的計策，即可先去與齊王以千金為注，賭賽三陣。」田忌肅然道：「先生數學兵法通神，田忌素來敬佩，豈有不用之理。好，我這就先去與齊王立下千金賭約，再回頭來領教先生高策。」

白胖的齊王聽了田忌的賭賽提議，兩眼笑成縫，連聲道：「好！好！有趣！有趣！」在傍侍候的弄臣侏儒連忙湊趣地跪下朗頌：「恭喜吾王又得千金，願吾王萬歲！」齊王大樂：「明日以百金大宴羣臣，預備牛鼎伺候。」侏儒載歌載舞，流下一尺長的口水。

(二)

田忌在周圍笑語喧嘩中，神色肅穆，恭敬的向孫臏說：「請先生指教。」孫臏低聲道：「將軍的上、中、下三匹馬雖統統敗陣，但齊王卻是陣陣都為險勝。雙方實力可以圖解如下。」孫臏一邊說，一邊用吳刀在地上畫了一個矩陣：

		(齊 王 馬)		
		上	中	下
(將 軍 馬)	上	輸	贏	贏
	中	輸	輸	贏
	下	輸	輸	輸

「以兵法的道理來觀察，這場賽馬是個數學上的分配問題。決勝之要點是如何排出陣勢，取得最大戰果。若以上馬對上馬，中馬對中馬，下馬對下馬，則三陣皆北。」孫臏隨即在矩陣上畫上記號*

(齊 王 馬)

		上	中	下
(將 軍 馬)	上	輸*	贏	贏
	中	輸	輸*	贏
	下	輸	輸	輸*

孫臏低聲有如耳語：「我方既無法全勝，只好退而求其次。其餘五種陣勢中，四種是一勝二負，一種是二勝一負。以君之下駟與彼上駟，取君之上駟與彼中駟，取君之中駟與彼下駟。」孫臏說完立即用吳刀把矩陣抹去。田忌神色不變，低聲讚道：「奇策，奇策。鬼谷子高徒，果然計出如神，深不可測。」

(三)

三陣馬賽下來，齊王空有寶馬，卻被孫臏的應用數學剋制的施展不開，輸了千金。全場觀眾沸騰，噪聲如雷，侏儒竟然哭將起來，悲悼失去的盛宴，文人學者也只好高誦「君子以德勝，不以力勝」的陣腔濫調。齊王心煩慮亂，一句話也聽不入耳，一聲聲傳令召見田忌。

田忌笑容滿面的向齊王說：「大王之敗，非馬之不力也。」齊王吃驚：「難道你用奸細做了手脚？」田忌看齊王想邪了，連忙正色道：「否，否。臣之勝是勝在利用數學賽馬。臣友孫臏先生精通數學，真乃天下奇材，臣也曾多次向大王推舉孫先生。此次賽馬臣之所以能勝，完全是因為臣採用了孫先生用數學解決了分配問題後，排出的陣勢。」齊王說「什麼孫臏？是不是那個給人砍了腿的矮子？他有什麼本事？連自己的腿都保不住？」田忌諫道：「大王不可以貌取人，此人學識國中無雙無對。請大王耐心聽臣解釋孫先生有關這次賽馬的教導。」田忌當場畫出矩陣，詳細說明六種陣勢，三種結果。周圍的人看田忌解釋價值千金的數學道理，都用心的體會，聽的呆了。

(四)

過了幾年，魏國攻趙，趙國向齊國求救。齊王於是拜田忌為帥，孫臏為軍師，統兵救趙。田忌與孫臏辭王領兵前進。一日，田忌與孫臏在虎帳中計議軍事，孫臏說：「兵法實者虛之，虛者實之。我軍應實行一條『不救之救，攻而不攻』的戰略，即圍魏救趙之計。不救趙而趙得救，以攻魏為名，先據有利地形，等破了魏軍先鋒，便可全師而回。」

於是齊軍直走魏國首都大梁。攻趙的魏軍連忙回國救援，魏軍左、中、右三軍與齊軍遇於桂陵。兩軍定於次日決戰。

田忌與孫臏召集將校開作戰會議。田忌發言：「魏軍先鋒分三隊而來，左軍最強，中軍次之，右軍最弱，我軍可分三隊迎敵。取我上軍對彼中軍，取我中軍對彼……。」孫臏打斷話頭：「將軍且慢。若用賽馬陣勢，基本原理對了，可是還得細算。本次作戰目的不是求『二勝一負』，最要緊的是速戰速決，大量消滅敵軍，牽動全體攻趙之魏軍回救，以達救趙之大目標。按敵軍前進方向計算，敵軍左軍攻擊方向為鐵嶺，該處容易防守。參謀人員根據地形，雙方實力等因素製成下列圖表，各位請看。」左右將校把圖表掛起如下：

敵軍：左、中、右三隊，每隊萬人，左軍攻鐵嶺，中軍攻小丘陵，右軍攻平原。

我軍：上、中、下三軍，每隊萬人。

明日自清晨至中午，雙方死傷可排成下列矩陣：

		(敵軍)		
		左	中	右
(我軍)	上	我 500 敵 500	我 1000 敵 2000	我 2000 敵 10000
	中	我 1500 敵 700	我 2000 敵 1000	我 2000 敵 3000
	下	我 2000 敵 500	我 2000 敵 500	我 2500 敵 2000

孫臏接着說下去：「如以我上軍對敵左軍，我中軍對敵中軍，我下軍對敵右軍，則一面膠着，兩面呈小敗。若以我上軍對敵中軍，以我中軍對敵右軍，以我下軍對敵左軍，則殺敵五千五百，自損五千。在六種陣勢中，以我上軍對敵右軍，我中軍對敵中軍，我下軍對敵左軍為最佳。我上軍盡是快馬硬弩，在平原作戰，定可全殲敵右軍。一上午作戰可殲敵一萬一千五百，自損六千。一過午後，將上軍得勝之兵與中軍合擊敵中軍，不出一個時辰便可盡殲敵中軍。然後以三軍之力會合圍擊敵左軍，敵左軍雖強，豈能戰乎？」

田忌拍案而起，大聲說道：「有理！有理！諸將要細心體會軍師所定的戰略意圖。一上午，中軍與下軍要盡量遲滯敵軍，利用地形防守，避免硬拼，上軍要不怕犧牲，以求盡速解決戰鬪。中軍與上軍會合上後，應立即改變戰術，全力出擊，爭取在午後一時辰內消滅敵中軍。諸將立刻回營布置。後日慶功大宴，準備班師回國。」

歷史上著名的桂陵之戰就這樣展開了。在孫臏的數學兵法的指揮下，齊軍大破魏軍。魏軍三停損了二停，先鋒大將中槍帶箭而逃。等到魏大軍從趙國撤出，四面雲集，尋求齊軍決戰時，齊軍早已安然班師回國了。

(五)

像這類幾匹馬與幾匹馬賽跑，然後將結果統籌計算；或兩國對壘，分數隊人馬同時作戰，然後將戰果加起來計算勝負的問題，都屬同一數學範疇，即分配問題。此類問題甚多，茲舉數例如下：

題 1. 某短期訓練班開四門課，由四位老師負責授課，各位老師授每門課的才能不一致。如何分配那門課由那位老師教授，才能獲得最大效果？

題 2. 某隊人合作挖土，工具有二個鋤頭，三個十字鎬等等，每人使用每個工具得出的挖土量可列成一表。如何分配工具的使用，才能獲得最大的挖土量？

題 3. 某公司有 10 個工作人員，從事 10 種不同的工作，每一位工作人員從事每一種工作，所得產值可列成一表。如何分配工作，才能使公司獲得最大的產值？

總之，分配論所討論的是「分配工作，取得最大效果」的數學問題。什麼是「效果」？有時很清楚，可以說是不說自明。例如賽馬問題，贏了就是有「效果」，又如上面的題 2 及題 3，挖土量與產值就依次是該兩問題的「效果」的衡量。但有時「效果」的意義非常含混不清，例如上面題 1 的授課「效果」，除非經過一場調查與研究，以及一場意見的交換及熱烈的辯論，是無法把授課「效果」數量化的。又例如上文中的桂陵之戰，可以有好幾種不同的計算方式。其一是只計算勝負場數，那最佳陣勢是上軍對中軍，中軍對右軍，下軍對左軍。其二是要求我軍傷亡最少，那麼最佳陣勢是上軍對左軍，中軍對中軍，下軍對右軍。

其餘還有要求敵軍傷亡最大，或敵我死傷差額最大等等。

由此看來，「效果」的計算，即使在同一問題中，也常因所要求的目標的不同，而有所不同。所以，目標的確立，與「效果」的計算，不是個數學問題，而是個社會學，政治學，經濟學或軍事學的問題。本篇短文的目的，只是想假借歷史故事，以引起讀者對數學的興趣，所以就不深談下去了。對這方面的數學有興趣的讀者，請參閱數學傳播第一卷第三期姚景星先生與劉陸雄先生合寫的「賽局淺說」一文。

——本文作者現任教於美國普渡大學數學系

通訊處：Prof. T. T. Moh

Dept. of Math. Purdue University

W. Lafayette, Ind. 47907

U. S. A.