數學傳播 32卷4期, pp. 73-79

N維歐氏空間的一個球切截面面積的度量

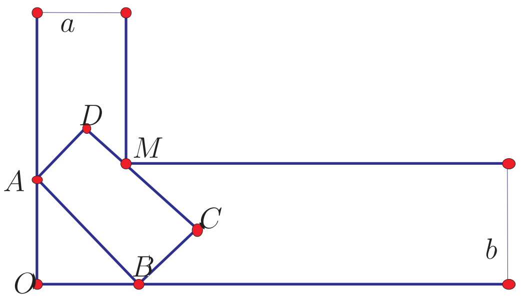
鄔天泉

摘要: 本文利用第一卦限內定球的切面和各個座標平面在第一卦限所截爲一直角單形的事實, 以及利用其切面面積 S 與諸側面面積的關係 (引理2), 而導出 S 的一個表示式, 進而考慮其極值 (第三節)。

關鍵字: n 維歐氏空間, 球切截面, 截面面積。

一. 問題的源起

某建築物內一個水平直角型過道, 兩過道的寬度分別爲 a, b 米, 有一個水平截面爲矩形的設備需要水平移進直角型過道, 若該設備水平截面矩形的寬爲 r 米, 長爲 L 米 $(a,b>r>0)$。試問 L 滿足什麼條件時, 該設備能水平移進拐角過道?



解: 在直角坐標系中, 該問題的數學模型就是求以 $M(a,b)$ 點爲圓心, r 爲半徑 $(a,b>r>0)$ 的圓的切線被 x 的正半軸和 y 的正半軸所截的線段 AB 長的最小值。

設圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(a,b>r>0)$ 的切線 L 方程爲 $\dfrac{x}{A}+\dfrac{y}{B}=1$ $(A,B>0)$, 則 $\left|\dfrac{a}{A}+\dfrac{b}{B}-1\right|=r\sqrt{\dfrac{1}{A^2}+\dfrac{1}{B^2}}$, 又因原點 O 與圓心 (a,b) 在直線 $\dfrac{x}{A}+\dfrac{y}{B}-1=0$ 的異

側, 知 $\dfrac{a}{A}+\dfrac{b}{B}-1=r\sqrt{\dfrac{1}{A^2}+\dfrac{1}{B^2}}$。設 $A=\rho\cos\theta,\ B=\rho\sin\theta,\ \rho>0,\ \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。得切線 L 被 x 的正半軸和 y 的正半軸所截的線段長

$$\rho=\frac{a\sin\theta+b\cos\theta-r}{\sin\theta\cos\theta}. \tag{1}$$

中國科學院成都電腦研究所楊路教授用電腦軟體 maple 算得 ρ 的最小值是下述 6 次方程的一個實根:

$$\begin{aligned}&x^6-(3a^2+3b^2+8r^2)x^4+36rabx^3+(3a^4-21a^2b^2-20a^2r^2-20b^2r^2+3b^4+16r^4)x^2\\&\quad+2(9a^3br+9ab^3r-8abr^3)x-(a^2+b^2)^2(a^2+b^2-r^2)=0.\end{aligned}$$

並指出這個方程 $(a\neq b)$ 沒有根式解。

二. 一般情形

我們將 $n=2$ 的情形推廣到一般的情形。設 $\lambda_i>r>0,\ 1\leq i\leq n$, 考慮一個以 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 爲心以 r 爲半徑的定球的動切面在第一卦限內被每個座標平面所截, 該截面的面積如定理所示, 我們接著在第四節討論該面積的最小值。我們先給出幾個定義和引理, 然後推出更一般情形下的結果。

引理 1[1]: n 維空間 $R^n=\Big\{(x_1,x_2,\ldots,x_n);\ x_i\in R,\ i\in\{1,2,\ldots,n\}\Big\}$ 中, 點 $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ 到平面 $\sum\limits_{i=1}^n A_ix_i=1$ 的距離爲 $d=\dfrac{\left|1-\sum\limits_{i=1}^n A_it_i\right|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n A_i^2}}$。

定義: 若 R^n 空間裏的一個 n 維單形的某共頂點的 n 條稜, 兩兩相互垂直, 則稱之爲直角單形。

引理 2[1]: 在一個直角單形裏,

1. 若共頂點的 n 條互相垂直的稜長分別爲 $x_i,\ i=1,2,\ldots,n$, 則其體積爲 $V=\dfrac{1}{n!}\prod\limits_{i=1}^n x_i$ 。

證明: 設共頂點 O 的 n 條互相垂直的稜 $\overline{OA_i}$ 的長分別爲 $x_i,\ i=1,2,\ldots,n$, 頂點 A_i 在 n 維歐氏空間 R^n 的座標爲 $(0,0,\ldots,x_i,\ldots,0)$, 則由 $\{O,A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ 張成的 n 維

單形 $\sum(A)$ 的有向體積[1]

$$V(O,A_1,\ldots,A_n)=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&1\\x_1&0&0&\cdots&1\\0&x_2&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x_n&1\end{vmatrix}=\frac{(-1)^{n+2}}{n!}x_1x_2\cdots x_n,$$

取其絕對值即為所求。

2. 若其底面面積為 S, 且各側面面積為 S_i, $1\le i\le n$, 則 $S^2=\sum\limits_{i=1}^{n}S_i^2$ 。

證明: 不妨設單形 $A=\{A_1,A_2,\ldots,A_n,A_{n+1}\}$ 的頂點 A_{n+1} 為直角頂點, 且頂點 A_i 所對的介面的 $n-1$ 維體積為 S_i, 兩頂點 A_i 和 A_{n+1} 所對的介面的內夾角為 $\theta_{(i,n+1)}$, 則有[3]

$$S_i=S_{n+1}\cos\theta_{(i,n+1)},\quad i=1,2,\ldots,n \tag{2}$$

$$S_{n+1}=S_1\cos\theta_{(1,n+1)}+S_2\cos\theta_{(2,n+1)}+\cdots+S_n\cos\theta_{(n,n+1)}, \tag{3}$$

將 (2) 與 (3) 的兩邊同乘以 S_{n+1}, 並將此時的 (2) 代入 (3) 內, 便有

$$S_{n+1}^2=S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2.$$

證畢。

設 R^n 空間中的球面 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\lambda_i)^2=r^2$, $\lambda_i>r>0$ 的切平面為 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{A_i}=1$, $A_i>0$。因原點 O 與球心 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 在平面 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{A_i}-1=0$ 的異側, 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{A_i}-1>0$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{A_i}-1=r\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i^2}},$$

去分母, 得

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_i\prod_{j\neq i}A_j\Big)-\prod_{i=1}^{n}A_i=r\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j\neq i}A_j\Big)^2}, \tag{4}$$

令 $\rho^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j\neq i}^{1\le j\le n}A_j^2$, $(\rho>0)$, $\rho x_i=\dfrac{\prod A_j}{A_i}=\prod\limits_{j\neq i}A_j$, $(i=1,2,\ldots,n)$, 易知 $\sum\limits_{1\le i\le n}x_i^2=1$

且 $\Big(\prod\limits_{1\le i\le n} A_j\Big)^{n-1}=\rho^n\prod\limits_{1\le i\le n} x_i$。(4) 式變爲

$$\rho\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i-\rho^{\frac{n}{n-1}}\Big(\prod x_i\Big)^{\frac{1}{n-1}}=r\rho,\quad \rho=\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i-r\Big)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}.$$

另外, 直角單形 $\{OA_1A_2\cdots A_n\}$ 的 n 個側面面積, 即 R^n 空間中以 $\{O,A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n\}$ $(1\le i\le n)$ 張成的 $n-1$ 維單形 $\sum(A)$ 的體積[1]

$$V(O,A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n)=\frac{1}{(n-1)!}\prod_{j\ne i}^{1\le j\le n}A_j,\quad 1\le i\le n.$$

所以它的底面面積爲

$$S=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{1}{(n-1)!}\prod_{j\ne i}^{1\le j\le n}A_j\Big]^2}=\frac{\sqrt{\rho^2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}}{(n-1)!}=\frac{\rho}{(n-1)!}=\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i-r\Big)^{n-1}}{(n-1)!\prod\limits_{1\le i\le n}x_i}.$$

根據以上分析我們可以得到以下定理:

定理: 在 n 維歐氏空間中, 設 $\lambda_i>r>0$, $i=1,2,\ldots,n$, 一定球的球心、半徑分別爲 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 和 r, 則 2^n 個卦限中的第一個卦限內的的定球的動切面被各個座標平面在第一卦限內所截得的截面面積爲 $\dfrac{\Big((\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)-r\Big)^{n-1}}{(n-1)!\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}$, 這裏 $x_i=\dfrac{\prod\limits_{j\ne i}^{1\le j\le n}A_j}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j\ne i}A_j^2}}$, $(1\le i\le n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$, A_j $(1\le j\le n)$ 表示截面在第 j 個坐標軸上的截距。

三. 應用舉例

以上提出了如下的問題:

求 n 元函數 $f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\dfrac{(k_1x_1+\cdots+k_nx_n-r)^{n-1}}{x_1x_2\cdots x_n}$,

(這裏常數 k_i 與 r 滿足 $k_i>r>0$, $(i=1,2,\ldots,n)$, $n\in N$, $n\ge 2$)

在區域 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$, $x_i>0$, $(i=1,2,\ldots,n)$ 上的最小值。

該問題也可以轉化爲如下的不等式問題:

已知常數 k_i 與 r 滿足 $k_i > r > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $n \in N$, $n \geq 2$, 不等式

$$(k_1x_1 + \cdots + k_nx_n - r)^{n-1} \geq \lambda \cdot x_1x_2 \cdots x_n$$

在條件 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, $x_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 下恒成立, 求實數 λ 的最大值。

該問題具有十分直觀的幾何特徵, 即 $\dfrac{f(x)}{(n-1)!}$ 表示 n 維實直角坐標空間中位於第一卦限內的定球 (球心爲 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, 半徑爲 r) 的動切面在該卦限內的截面面積, 求出這個函數的最小值就得到了這個截面的最小值。

當 $2 \leq n \leq 4$ 時, 對每個正的常數 k_i 賦給具體的值, 利用 BOTTEMA[2] 軟體, 使用 xfmax 指令, 在普通的電腦上可以算出最大的 λ 值, 該值是某個一元高次方程的實根。比如 $n = 2$ 時, 是某個一元六次方程的實根。

當 $n = 3$ 時, 是某個一元十四次方程的實根, 且通常這些實根不能用根式表達。

例1: 在空間直角坐標系中, 求球心爲 $C(2, 3, 4)$, 半徑爲 1 的球的切平面被三個座標平面所截得位於第一卦限內的截面面積的最小值。

解: 該問題等價於求 $\dfrac{(2a + 3b + 4c - 1)^2}{2!abc}$ 的最小值, 這裏正參數 a, b, c 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 。我們還可以把這個問題轉化爲如下問題:

已知不等式 $(2x + 3y + 4z - 1)^2 \geq kxyz$ 對滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的正實數 x, y, z 恒成立, 試求實數 k 的最大值。

使用 Bottema 軟體 , 編輯程式:

```
> xmax((2*x+3*y+4*sqrt(1-x^2-y^2)-1)^2>=k*x*y*sqrt(1-x^2-y^2),[x^2+y^2<1],k);
```

運算得出實數 k 的最大值是下列 14 次代數方程的惟一正根:

$$\begin{aligned}
&-18106845935173632000000 + 22380050595040985088800k - 14564639976537607372 8k^2 \\
&+69343699736820449 28k^3 - 271671666751397888k^4 + 943837499906k^5 \\
&-308031767576320k^6 + 9676992724992k^7 - 276465248000k^8 + 6976542720k^9 \\
&-147962528k^{10} + 2270208k^{11} - 21136k^{12} + k^{14} = 0,
\end{aligned}$$

其近似值大約爲 $85.35866\cdots$。這樣就得到以點 $C(2, 3, 4)$ 爲球心, 1 爲半徑的球的切平面被三個座標平面所截的位於第一卦限內的截面面積的最小值大約爲 $42.67933\cdots$ 。

例2: 在空間 R^4 中, 求球心爲 $C(2, 3, 5, 6)$, 半徑爲 1 的球的切平面被座標平面所截得位於第一卦限內的截面面積的最小值。

解: 設所得截面的面積爲 s, 記 $k = 3!s = 6s$, 則問題轉化爲:

已知不等式 $(2x+3y+5z+6w-1)^3 \geq kxyzw$ 對滿足 $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ 的正實數 x, y, z, w 恒成立, 試求實數 k 的最大值。

這個 k 的最大值 $k_{\max}=6s_{\min}$ 的近似值, 用 Bottema 中的指令 xfmax 求出的結果爲: $4346.94707 < k_{\max} < 4346.94708$, 並且可以精確到小數點後任意位, 但關於該 k 的一元高次方程在普通電腦上顯示不出來。

故 $724.49117 < s_{\min} < 724.49118$ 。

當 $n \geq 5$時, 上述問題在普通的電腦上的操作就難以實現。

四. 函數 $f(x)$ 的一個下界

在一般情形下上述問題無初等解答, 但我們可以考慮 $f(X)$ 的下界. 成都大學的文家金副教授得到

$$f(X) > \frac{(n-1)^{n-1}k_1k_2\cdots k_n\cdot(\min\{k_i\})^{n-2}}{\left[\sqrt{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}+\max\{k_i\}\right]^{n-1}} \tag{*}$$

證明:

令 $\dfrac{k_ix_i}{r}=y_i$, $i=1,2,\ldots,n$, 則

$y_1,\ldots,y_n>0$, $\dfrac{y_1^2}{k_1^2}+\cdots+\dfrac{y_n^2}{k_n^2}=\dfrac{1}{r^2}$;

$f(X)=\dfrac{k_1k_2\cdots k_n}{r}\cdot\dfrac{(y_1+y_2+\cdots+y_n-1)^{n-1}}{y_1y_2\cdots y_n}$;

$$\text{又 } 1<\frac{\min\{k_i\}}{r}\leq\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}\leq\frac{\max\{k_i\}}{r} \tag{5}$$

由 Jensen 不等式有

$$\left[y_1^{\frac{n-2}{n-1}}+y_2^{\frac{n-2}{n-1}}+\cdots+y_n^{\frac{n-2}{n-1}}\right]^{\frac{n-2}{n-1}} > (y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{\min\{k_i\}}{r} \tag{6}$$

由柯西不等式有

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_n &\leq \left[(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)\Big(\frac{y_1^2}{k_1^2}+\frac{y_2^2}{k_2^2}+\cdots+\frac{y_n^2}{k_n^2}\Big)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \end{aligned} \tag{7}$$

由 A-G 不等式有

$$\begin{aligned}
&(y_1+\cdots+y_n)^2-(y_1^2+\cdots+y_n^2)\\
&\quad=y_1(y_2+\cdots+y_n)+\cdots+y_n(y_1+\cdots+y_{n-1})\\
&\quad\ge(n-1)\Big[y_1(y_2y_3\cdots y_n)^{\frac{1}{n-1}}+\cdots+y_n(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\Big]\\
&\quad=(n-1)\Big(y_1^{\frac{n-2}{n-1}}+\cdots+y_n^{\frac{n-2}{n-1}}\Big)(y_1y_2\cdots y_n)^{\frac{1}{n-1}}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

由 $(y_1+\cdots+y_n)^2-(y_1^2+\cdots+y_n^2)=\Big[(y_1+\cdots+y_n)-(y_1^2+\cdots+y_n^2)^{\frac12}\Big]\times\Big[(y_1+\cdots+y_n)+(y_1^2+\cdots+y_n^2)^{\frac12}\Big]$ 及 (5) $\sim$ (8) 得

$$\begin{aligned}
[(y_1+\cdots+y_n)-1]^{n-1}&>\Big[\sum_{i=1}^n y_i-\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{\frac12}\Big]^{n-1}\\
&>\frac{(n-1)^{n-1}\cdot y_1y_2\cdots y_n\cdot\Big(\dfrac{\min\{k_i\}}{r}\Big)^{n-2}}{\Big[(k_1^2+\cdots+k_n^2)^{\frac12}\cdot\dfrac{1}{r}+\dfrac{\max\{k_i\}}{r}\Big]^{n-1}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{[(y_1+\cdots+y_n)-1]^{n-1}}{y_1y_2\cdots y_n}&>\frac{(n-1)^{n-1}\Big(\dfrac{\min\{k_i\}}{r}\Big)^{n-2}}{\Big[(k_1^2+\cdots+k_n^2)^{\frac12}\cdot\dfrac{1}{r}+\dfrac{\max\{k_i\}}{r}\Big]^{n-1}}\\
&=\frac{r\cdot(n-1)^{n-1}(\min\{k_i\})^{n-2}}{\Big[(k_1^2+\cdots+k_n^2)^{\frac12}+\max\{k_i\}\Big]^{n-1}}, \qquad (9)
\end{aligned}$$

由不等式 (9) 得

$$f(X)>\frac{(n-1)^{n-1}k_1k_2\cdots k_n\cdot(\min\{k_i\})^{n-2}}{\Big[\sqrt{k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2}+\max\{k_i\}\Big]^{n-1}}.$$

作者衷心感謝成都電腦究所楊路教授在在本文寫作過程中提供的幫助!

參考文獻

1. 沈文選, 單形論導引, 長沙: 湖南師範大學出版社, 2000年4月, P72-73 。
2. 中國科學院成都電腦研究所楊路教授領導的研究小組研製基於 maple 平臺的人工智慧軟體。
3. 張晗方, 幾何不等式導引, 北京: 中國科學文化出版社, 2003年6月, P126 。

———本文作者現任教浙江省台州市洪家中學———