數學傳播 32卷4期, pp. 51-55

「五餅二魚」——談數學教學分享

楊惠后

在約翰福音第六章一至十四節中有一則聖經故事「五餅二魚」, 故事的內容簡單地說就是有一個小男孩主動奉獻了他僅有的五個大麥餅及二條魚, 在天主的愛及祝福下, 餵飽了五千人的肚腹, 還有剩餘。故事的主旨是 : 因爲「分享」, 所以能夠得到更多。個人在過去十幾年的國中教學生涯中, 發現或整理了一些很不錯的資料, 與學生做討論之後, 她們常會感到有意外的收穫。因此, 現在的我也想對數學教育略盡點棉薄之力, 在此舉幾個例子分享給大家。

(一) 尋找質數

在國一課程的整數單元中有這麼一道題 : 請找出 1 到 100 之間的質數。一般而言, 我們習慣採用兩千多年前古希臘數學家埃拉托賽尼 (Eratosthenes) 的篩選法。原表格 (見表一) 是將 1 到 100 的整數, 按每 10 個寫成一列排成的, 並依照下列步驟進行: (1) 刪去1。(2) 保留 2, 並刪去其餘 2 的倍數。(3) 保留 3, 並刪去其餘 3 的倍數。(4) 保留 5, 並刪去其餘5的倍數。(5) 保留 7, 並刪去其餘 7 的倍數。如此剩下的 25 個整數即爲質數。

表一.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

新教法的表格 (見表二) 是將 1 到 100 的整數, 按每 6 個寫成一列排成的, 並依照下列步

驟進行: (1) 刪去1。(2) 在第2行中, 保留 2, 其餘的整行刪去。(3) 在第 3 行中, 保留 3, 其餘的整行刪去。(4) 把第 4 行及第 6 行整行刪去。接下來, 我們會發現除了 2、3 之外, 其餘的質數一定只會出現在第 1 行及第 5 行, 因此只要逐一檢查 2、3、5、7 是否能整除該數即可。

表二.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~
~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~
~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~
67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~
73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~
79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~
~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~
97	~~98~~	~~99~~	~~100~~		

新方法的優點是不僅在尋找質數的速度上較快, 而且學生會很驚訝地看到: 除了 2、3之外, 其他的質數只會出現在第 1 行及第 5 行。這是一個很奇妙的發現! 學生當然很容易就記住了這25個質數。而且在引導下, 學生會說出除了 2、3 之外, 其他的質數是可以寫成「6的倍數±1」的形式; 這時, 我們當然要進一步鼓勵有興趣、有能力的學生嘗試說明。

性質: 質數中除了 2、3 之外, 其他的質數會是「6的倍數±1」的形式。

說明: 今將任一正整數表成 $6n+1$、$6n+2$、$6n+3$、$6n+4$、$6n+5$、$6n+6$ 的形式 (其中 $n\in\{0\}\cup N$), 因為 $6n+2$、$6n+4$、$6n+6$ 是偶數, $6n+3$ 可被 3 整除; 因此質數中除了 2、3 之外, 剩下的一定落在 $6n+1$、$6n+5$ 中; 而且 $6n+5$ 又可以改寫成「6的倍數-1」的形式。所以結論是質數中除了 2、3 之外, 其他的質數會是「6的倍數±1」的形式。

(二) 求解一元一次方程式

平常我們習慣使用等量加、減、乘、除法公理或移項法則來求解一元一次方程式; 但是早

在代數發明以前, 古埃及人曾利用一種奇怪的方法 (稱爲雙錯位法、雙假設法) 來猜測、驗證、修正、求解一元一次方程式。

舉例說明: 求解 $4x-12=0$

令 $y=4x-12$

先猜測 $x_1=2$, 代入方程式得 $y_1=-4$

再猜測 $x_2=5$, 代入方程式得 $y_2=8$

則此方程式的解爲 $x=\dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{y_1-y_2}=\dfrac{-4\times 5-8\times 2}{-4-8}=3$

我採用有獎徵答 的方式鼓勵學生研究古埃及人的解法, 下面是我的學生的想法:

求解 $ax+b=0$

將 $x=x_1$ 、x_2 分別代入 $y=ax+b$ 式子中, 可得 $\begin{cases} x_1a+b=y_1\cdots(1)\\ x_2a+b=y_2\cdots(2)\end{cases}$

將 (1)−(2) 得: $a(x_1-x_2)=y_1-y_2$

$$\Rightarrow a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

將 $(1)\times x_2-(2)\times x_1$ 得: $b=\dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$

因爲 $x=\dfrac{-b}{a}$

所以 $x=\dfrac{\dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{x_1-x_2}}{\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}=\dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{y_1-y_2}$

事實上, 早在中國古算法中有「盈不足術」, 是用來求解應用問題的一種別開生面的方法; 有些學者甚至認爲西方的雙假設法是中國傳過去的。在盈不足術中, 把猜測假設的數據 x_1 、x_2 稱爲「假令」, 而把用「假令」來進行檢驗考核所得的結果稱爲「盈」、「不足」或「適足」三種情形。在上例中 $Y_1=-y_1$ 是「不足」, $Y_2=y_2$ 是「盈」, 公式解是 $x=\dfrac{Y_1x_2+Y_2x_1}{Y_1+Y_2}$, 所以代入公式得解是 $\dfrac{4\times 5+8\times 2}{4+8}=3$ 。

(三) 文字遊戲與娛樂數學

對一般學生而言, 若能在枯燥乏味的數學課中穿插一些有趣的、別緻的、與課程內容相關的益智活動, 她們會顯得很有討論的熱忱。下面有三種文字遊戲, 我會分別安插在不同的課程內容中進行: (a) 日本有不少學者精通漢文, 他們把中國古代詩詞中的名言佳句與「蟲食算」結合

起來, 製作了一些風格優異的小品。遊戲規則是每題中不同的國字代表不同的阿拉伯數字, 請找出滿足這些聯立方程組的解。

$$1.\begin{cases}\text{年年}\times\text{歲歲}=\text{花相似}\\ \text{歲歲}\div\text{年年}=\text{人}\div\text{不同}\end{cases}\quad 2.\begin{cases}\text{床前}=\text{明月}+\text{光}\\ \text{疑是}=\text{地上}\times\text{霜}\end{cases}\quad 3.\begin{cases}\text{舉頭}\times\text{望}=\text{明月}\\ \text{低頭}\times\text{思}=\text{故鄉}\end{cases}$$

(b)「數謎」(Cryptarithm) 是最吸引人的益智遊戲之一。數謎是一個算術問題裏, 以字母代替數字構成謎面。謎題就是去找出原來的數字。每一個字母代表一個確定的阿拉伯數字, 且每一個阿拉伯數字僅有一個字母爲其值。最有趣的數謎往往能夠形成某種英文上的意義! 請看看下面幾個謎題。

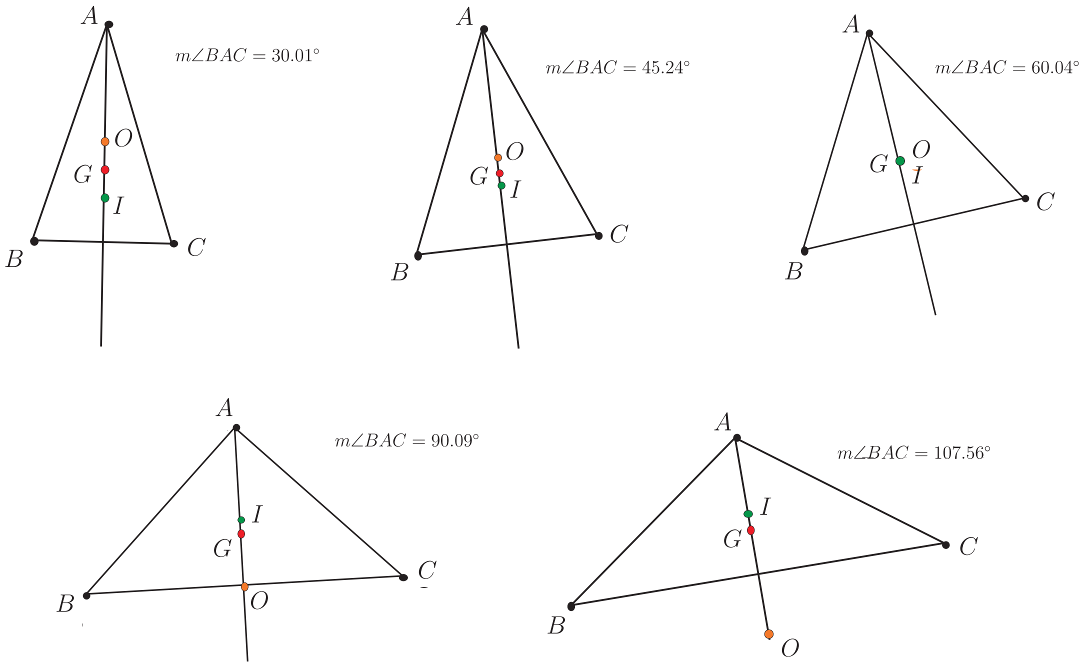
$$1.\ \begin{array}{r} \text{ONE}\\ \text{TWO}\\ +\ \text{FIVE}\\ \hline \text{EIGHT}\end{array}\qquad 2.\ \begin{array}{r} \text{GIVE}\\ +\ \text{MORE}\\ \hline \text{MONEY}\end{array}\qquad 3.\ \begin{array}{r} \text{CROSS}\\ +\ \text{ROADS}\\ \hline \text{DANGER}\end{array}\qquad 4.\ \begin{array}{r} \text{THIS}\\ \text{IS}\\ +\ \text{VERY}\\ \hline \text{EASY}\end{array}$$

(c) 數學家道吉森 (Charles L. Dodgson, 1832-1898) 以卡洛爾 (Lewis Carroll) 爲名, 發明了「字對」(Doublets) 遊戲, 遊戲規則是拿兩個長度相同的字, 每一次只能改變一個字母, 經過一連串的中間字, 結果由一個字變成另一個字。中間字不可以使用專有名詞, 而且所用的字必須能在一般通用的字典裡找到。我曾與學生玩如何從 hate (討厭) → love (愛)? 提供幾個解法給大家參考 : (1) 五步就成功: hate → late → lake → like → live → love (2) 四步就成功: hate → have → cave → cove → love (3) 三步就成功: hate → have → hove (heave 的過去式) → love 。是不是很有意思! 有興趣的讀者可以挑戰看看這道難題: spring → summer → autumn → winter 。

(四) 三角形的三心位置探討

三角形的三條中線的交點稱爲重心 G, 三條中垂線的交點稱爲外心 O, 三條內角平分線的交點稱爲內心 I, 學生大概都知道正三角形的三心共點這個性質, 也知道等腰三角形的三心共線這個性質, 但是關於三心的相對位置應該是模糊的? 我利用 GSP 繪圖軟體畫出等腰三角形的三心相對位置 (見下圖), 利用動態的變化會比較容易觀察三心的位置關係。

我們會發現: (1) 當頂角 $\angle BAC<60^\circ$ 時, 三心的相對位置由上而下是 $O\to G\to I$ 。(2) 當頂角 $\angle BAC=60^\circ$ 時, 三心共點。(3) 當頂角 $\angle BAC>60^\circ$ 時, 三心的相對位置由上而下變爲 $I\to G\to O$ 。事實上, 當我們設定 $\overline{AB}=\overline{AC}=x$ 、$\overline{BC}=2y$ 、底邊 $\overline{BC}$ 上的高爲 h 時, 可求出頂點 A 到三心的長度別爲 $\overline{AI}=\dfrac{xh}{x+y}$ 、$\overline{AG}=\dfrac{2h}{3}$ 、$\overline{AO}=\dfrac{x^2}{2h}$ 。



文字遊戲的參考答案:

(a) 1. $\begin{cases} 44 \times 22 = 968 \\ 22 \times 44 = 5 \div 10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 82 = 79 + 3 \\ 60 = 15 \times 4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 13 \times 6 = 78 \\ 45 \times 2 = 90 \end{cases}$

(b) 1. $621 + 846 + 9071 = 10538$

2. $9476 + 1086 = 10562$

3. $96233 + 62513 = 158746$

4. $3915+15+4820 = 8750$ 或 $4925+25+3806 = 8756$ 或 $2710+10+3689 = 6409$

參考文獻

1. 國中數學課本第一冊, 南一書局, 民國96年, P.91-92 。
2. 數學教學方法, 孫文先編譯, 九章出版社。
3. 數謎, 孫文先編譯, 九章出版社, 民國70年 。
4. 拼圖拼字拼數學, Martin Gardner 著, 胡守仁譯, 遠流出版社, 民國94年, P.56-60 。
5. ⟨⟨九章算術⟩⟩ 及其劉徽注研究, 李繼閔著, 九章出版社, 民國81年, P.185 、P.191 。

———本文作者現任教台中市曉明女子中學———