數學傳播 32卷4期, pp. 33-50

走一趟高中機率教學之旅

丁村成

記得 1999 年在一次機率統計的教材研討會上, 高中教師與教科書作者面對面討論課程內容。有一位老師在會中提出一個問題:「課本在排列組合單元中擲兩粒公正骰子之出現情形, 依照重複組合的觀點來看有 $H_2^6 = C_2^7 = 21$ 種, 但到了古典機率單元中投擲兩粒公正骰子的樣本點個數, 卻採用重複排列的方法來算有 $6^2 = 36$ 種。爲什麼同一本教科書上會有這種自相矛盾的說法呢?」當時筆者是以教科書作者的身份出席, 經過這次會議才猛然發現古典機率的教學當中, 處處都可能存在這種類似的迷思概念 (misconception)。最令我感到訝異的是在 2005 年的教師甄選中, 有 65 位具有碩士學位以上的準教師參加考試, 筆者出了一道甄選試題如下:

> 「將 4個球全部放入 5個箱子, 問每個箱子最多有一球的機率是多少?」在課堂中若有學生希望您考慮下列四種情形來解答這一道題, 請說明您要如何指導學生讓他們瞭解以下各題的機率?
>
> (1) 顏色不同的球放入編號不同的箱子
>
> (2) 完全相同的球放入編號不同的箱子
>
> (3) 顏色不同的球放入完全相同的箱子
>
> (4) 完全相同的球放入完全相同的箱子

在 65 位教師的答案中答對者僅有 4 位, 佔 6.2%; 答錯者竟有 51 位, 佔 78.4%; 完全空白者有 10 位, 佔 15.4%。在答錯的 51 位老師之解答中, 有 36 位採用各種排列組合的觀點來思考樣本空間, 有 15 位所給答案出現了一些答非所問的情形。從這次甄選教師的年齡層來看, 其分佈介於 26 歲 $\sim$ 50 歲之間, 顯示古典機率教學的盲點是普遍存在的。一個存在高中教材三十年之單元有著如此大的問題, 值得台灣數學教育界一同深思。筆者爲了探討此問題的癥結所在, 於是開啓了這趟漫長的機率教學之旅。

一. 旅行出發之前的準備

機率概念是用來測量我們所關心事情可能發生程度大小的一種指標, Shaughnessy(1992)

認爲機率包含有統計的隨機事件 (random event) 與經驗的可信程度 (degree of belief)。根據文獻上的討論, 其意義大致上可分爲四種 (Hawkins & Kapadia, 1984; Konold, 1991; Shaughnessy, 1992 and Koirala,1998): 古典機率 (classical probability), 頻率機率 (frequentist probability), 主觀機率 (subjective probability), 形式機率 (formal probability)。簡單說明如下:

1. 頻率機率

這種機率的計算是由觀察重複試驗之相對次數而來, 亦即是根據實驗設計之觀察結果來決定事件發生的可能大小, 所以也被稱爲實驗機率 (experimental probability)。王幼軍 (2007) 指出, 機率論公理化的系統最早出現在馮 · 密歇斯 (R. von Mises) 的機率論基礎研究一書中, 他覺得在那時候的機率論還不能稱得上是一門數學, 爲了把機率論改造成一門數學學科, 於是將機率建立在具有隨機性質的序列基礎上, 也就是把機率定義爲相對頻率的極限。馮 · 密歇斯曾將此種機率定義爲: 若重複一個試驗 n 次某一結果 A 出現的次數爲 n_A, 當 n 增加時相對次數 $\dfrac{n_A}{n}$ 會趨近於實數 $P(A)$, 我們稱 $P(A)$ 爲事件 A 發生的機率, 亦即 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n_A}{n}$ (引自 Borovcnik et al. 1991)。用這種方法雖然可以處理很多事件的機率, 但通常必須對所要研究的對象作長期觀測, 或者重複比較多次試驗才能得到較爲正確的機率, 此一觀點結合大數法則 (the law of large number) 的概念在現行國中小學機率教材是相當重要的部分。

2. 古典機率

設S 是由有限個樣本點所組成的樣本空間且每一樣本點出現之機會均等 (equally likely), 則事件 A 在其樣本空間 S 中之機率 $P(A)$ 定義爲 A 的樣本點個數 $n(A)$ 與 S 的樣本點個數 $n(S)$ 之比值, 亦即 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$。此一定義是法國數學家拉普拉斯 (Laplace) 於1812年, 在其所著機率的分析理論 (Théorie Analytique des probabilités) 一書中的記載, 他最初下的定義是「所求事件的次數占全部可能事件總數之比例」(Koirala, 1998)。這是機率發展史上第一次清晰的給出機率的定義, 所以又被稱爲古典機率 (Borovcnik & Kapadia, 1991)。在定義中假設樣本空間 S 是由有限個基本事件所構成, 並規定在試驗中每個基本事件出現機會均等, 此一規定是古典機率非常重要的基礎條件, 在這個條件下之機率計算只須用到排列組合, 其優點是計算方便而且直觀, 因此構成目前高中機率教材的主要內容。

3. 主觀機率

當一隨機試驗不能重複進行的時候, 事件 A 發生的機率可定義爲個人對事件 A 發生的相信程度, 此相信程度往往會因人而異, 這是 20 世紀發展出來的主觀機率。例如對於從未比賽過

的兩支球隊, 誰贏誰輸實在很難下定論, 所以只好根據各種資料加以判斷, 來認定比賽雙方獲勝的機率, 這種機率是日常生活中常會遇到的問題, 但其值也會因每個人隨著新訊息的出現, 而調整最初基於經驗或直覺的估計。Borovcnik et al. (1991) 對主觀機率的說法是「這種機率是依個人既有的主觀意識去評定一個事件發生的機率」。Konold (1991) 更進一步闡述此一觀點的複雜性, 他認爲將這類個人的理論拿來作爲正規的機率定義, 可以具體說明人們在遇到新資訊時, 應該如何理性地形成和改變他們的信念。Li, J. (2000) 認爲, 主觀機率是教學上一個很好的出發點, 通過課堂教學能夠將學生之自我經驗和機率理論聯繫起來, 可以培養學生良好的直覺。Fischbein (1987) 也指出, 直觀具有適應性, 透過系統的教學能夠影響一個人的直觀能力。所以筆者認爲, 教師在課堂上應鼓勵學生做合理的猜測, 並學習接受每個人都有可能猜錯的產生。然而, 這也正是目前台灣數學教育在教學當中最欠缺的地方, 值得數學教師在課堂上作進一步具體實踐。

4. 形式機率

此種機率是由蘇俄數學家柯莫勾拉夫 (Kolmogorov) 所提出, 他假設有一試驗的樣本空間爲 S, 對於 S 中的每一事件 A 指定一個值 $P(A)$, 並規定 $P(\bullet)$ 滿足下列三個公設: (1) 對任一事件 A 恆有 $P(A) \geq 0$ (2) 樣本空間 S 之機率 $P(S) = 1$ (3) 任二事件互斥時有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, 我們稱 $P(\bullet)$ 爲一機率測度, 並記 $P(A)$ 爲事件 A 之機率。柯氏公設化定義是把機率定義爲隨機試驗樣本空間上的集合函數, 這種機率是筆者在清華大學唸碩士班所接觸的內容, 使用的教材爲 Richard Durrett 之 Probability: Theory and Examples 與 Kai Lai Chung 的 A Course in Probability Theory, 都是採用測度論 (Measure theory) 的分析觀點來介紹。機率的公理化把機率概念從頻率定義中抽離出來, 同時也可以由公理系統回到現實世界, 從近代機率發展的主流來看, 這種依賴測度論的趨勢將在未來大大提高。走筆至此, 非常懷念那一段在清華追隨許世雄教授學習機率的時光, 他以極佳的學養帶領學生進入深奧有趣的機率世界, 讓我對機率有一個全新的見解。

在上面所談的四種不同機率定義中, 古典機率是目前台灣高中機率課程的主要內容, 其觀點是假設在隨機試驗中每一基本事件發生的機會均等。雖然, 古典機率所使用的工具只是排列組合的計算, 但因涉及問題層面較廣且有些條件比較隱晦, 更增加了解題的困難與犯錯的可能。由於其定義中假設每一樣本點出現機會均等, 在日常生活中有時候卻又顯得不切實際, 使得一些機率統計學者認爲應該根據實驗結果來決定事件發生的大小, 亦即採取頻率機率的定義。目前在台灣的國中小學機率教學與高中古典機率教學之差別, 在於後者只從樣本空間直接定義機率, 而前者特別強調以試驗數據透過大數法則來作爲樣本空間與機率定義的橋樑。Steinbring (1991) 認爲, 學生即使在每次相同的條件下作試驗, 也不一定會符合古典機率中每個樣本點出

現之機會均等, 於是當實驗結果與理論定義不一致時, 往往就迫使學生的經驗機率去符合古典機率。例如在投擲一枚硬幣的實驗時, 直接告訴中小學生出現正面的機率是 $\frac{1}{2}$, 這樣的教學方法其實是違反其經驗的, 教師應該以學生實際所試驗的相對次數作爲判斷事件產生機率的依據。亦即投擲一枚硬幣若重複試驗多次的話, 那麼實驗中得到正面的頻率會逐漸穩定逼近到 $\frac{1}{2}$ 附近, 讓學生注意到用試驗方法得出的頻率只是機率之估計値。

趙小平等人 (2000) 指出, 在機率的頻率定義與古典定義之教學中, 會遇到這樣的問題: 機率是什麼? 是一個精確的數還是一個近似的數? 機率怎麼得到? 是通過計算還是通過估計? 這些問題在機率學習中不可避免, 但教師卻難以回答。如果課堂中不回答這些問題, 那麼即使是數學非常優秀的學生, 在他們學習高中階段的機率統計後, 仍然不能理解其眞正意義。Shaughnessy (1992) 也指出, 過去有些研究認爲某種機率觀點優於另一種, 但他認爲機率的教學重點宜採取模式化 (modeling), 亦即不同情況下所使用的機率模式應該由學生所要解決的任務來決定。因此, 在一些機率問題上要處理主觀機率和古典機率間的衝突, 可通過頻率機率的觀點配合模擬 (simulation) 試驗得到化解, 甚至可以採取數種機率概念的教學模式才是比較實際的作法, 因爲在更複雜的研究中所獲得的答案有時必須依賴不同的機率定義。

參與本教學之旅的學生爲台北市某高中的三班社會組高二學生, 分別是 A 班 48 人、B 班 45 人、C 班 50 人。有關問卷調查都以三個班級共 143 人爲對象, 答題理由整理之陳列不分班級, 而綜合以 S_1、S_2、... 依序列出。而訪談原則上選取錯誤較具代表性的學生爲主, 爲了方便區別學生之來源皆以四位代碼表示, 例如 AS01 表 A 班編號 01 的學生, 依此類推。

二. 頻率機率旅途的探索

從皮亞傑 (Piaget) 的觀點來看, 比率概念的瞭解是學生認知發展進入形式操作期的指標。由於連接大數法則必須具備量化相對差異 (quantitative relative difference), 因此他認爲進入形式操作期 (約 11 歲 $\sim$ 12 歲) 的學生始能了解大數法則 (引自林燈茂, 1992)。在 Piaget & Inhelder, (1975) 的兒童機率觀念的來源 (The origin of idea of chance in children) 書中對學生作了一些訪談, 他們使用了一種劃有八個相等扇形區域的旋轉盤 (Spinner), 以下是訪談者對 Mic (11 歲 11 個月) 和 Lau (13 歲 4 個月) 的訪談記錄:

訪談者: 如果我轉動指針 800 次之後, 被轉到的顏色會比轉動指針 15 次的結果, 更平均分配或更不平均分配呢?

Mic : 轉動 800 次會更平均分配, 它將使得轉盤上之各種顏色更平均的出現。

訪談者: 若我轉動指針 800 次時每種顏色被轉到的次數, 會比轉動指針 15 次分配得更平均或更不平均?

Lau　: 轉動 800 次會使每種顏色分配更平均, 旋轉次數愈多會使其平均分配的機會愈大。

從 Piaget 與 Inhelder 對於 Mic 和 Lau 的訪談中, 僅根據以上一些對話之片段, 就判定他們已發現了「試驗次數愈多時分配會愈均勻」的大數法則特性, 在證據上似乎略顯不足。雖然 Piaget 等人也提出大數法則的意義是「相對次數的極限等於機率 (the limit of relative frequency equals the probability)(p.234)」, 或「試驗次數愈多次時其分配愈均勻 (the uniform distribution is tied to large numbers)(p.60)」。但就上述訪談的內容來看, 筆者認爲 Piaget 等人有「試驗次數愈多, 各種顏色出現次數等於預期平均次數的機會也愈高」的想法, 這種想法正是對大數法則的一種誤解。一般所指的大數法則是下面的 J. Bernoulli 大數法則:

設 n_A 是 n 次試驗中事件 A 發生的次數, p 是事件 A 在每次試驗時發生之機率, 則對於任意的 $\varepsilon > 0$, 我們有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$

此一法則說明, 事件 A 發生的頻率 $\dfrac{n_A}{n}$ 收斂到事件 A 發生的機率 p, 這是以嚴格的數學形式表達了頻率的穩定性, 也就是說當 n 很大時, 事件 A 發生的頻率與其機率有較大誤差的可能性很小, 因而在實際應用上可用頻率來估計其機率。在 $P\left\{\left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ 中, 任一正數 ε 由於 $\dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ 會隨著 n 的增大而漸小, 這使得 $P\left\{\left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}$ 會隨著 n 的增大而愈大。但必須注意上述大數法則不適用於 $\varepsilon = 0$ 之情形, 如果誤用大數法則將容易衍生「試驗次數 n 愈大, $\dfrac{n_A}{n}$ 等於 $P(A)$ 之機率也愈大」的錯誤概念。因此, 不要認爲試驗次數愈多便以爲相對次數 $\dfrac{n_A}{n}$ 會穩定的趨於機率 p, 亦即 J . Bernoulli 大數法則並不蘊涵 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n_A}{n}=p$, 它只能說對足夠大的試驗而言, 某事件成功的相對次數與該事件成功之機率會有微小偏差的機會問題, 此觀念與「$\dfrac{n_A}{n}$ 收斂於 p」在分析學上之說法是不同的。

分析上 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n_A}{n}=p$ 之意義是指: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0>0\ \ni \forall\ n>n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon$, 此處的 n 沒有一個例外。但 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$ 係指 $\dfrac{n_A}{n}\to p$ *in probability*, 其意義是指: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0>0\ \ni \forall\ n>n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon$, 此處之 n 會存在一些例外, 但這種 n 所佔的比例幾乎等於0 。舉個例子, 投擲硬幣出現正面的機率爲 $\dfrac{1}{2}$, 由大數法則知道對任意給予小數 $\varepsilon>0$, 當 $n\to\infty$ 時 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{n_A}{n}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon\right\}\to 1$, 但無論 n 有多大, 並非完全沒有「每次都出現正面」的機會, 亦即 $\dfrac{n_A}{n}=1$ 也是有可能的, 但它很少發生的理由在於 n

次投擲每次都出現正面之機率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 使得在 n 增大時其機率會趨近於0。

林燈茂 (1992) 曾提出, 在國中和小學的教科書之若干不良問題及解答, 很可能反而誤導數學成就優異的國中學生對大數法則容易衍生迷思概念。其研究中發現台灣地區國民小學六年級學生在投擲硬幣的實驗中, 並不是隨著試驗次數增加的正反面次數之比值愈來愈接近來理解機率, 而是從所出現正反面相差的次數來看機率。因此, 實驗結果與機率值相差很大, 使得教師本身也無法作出適當的解釋, 只好在學生實驗作完之後直接定義機率, 導至學生根本無法眞正了解機率的意義, 此一結論與 Steinbring(1991) 之觀點不謀而合。根據筆者實際的教學經驗, 高中學生在學習古典機率之前仍存在有很多錯誤的概念, 身為一位數學教師有必要對頻率機率再作一番更深刻的探討, 才能瞭解如何幫助學生尋找學習前的一些迷思概念, 讓學生能穩健的踏入學習古典機率之門。為了確實掌握學生先前學習頻率機率的概念, 筆者設計了下面問題對學生展開問卷調查。

情形甲: 投一枚公正硬幣 100 次出現 50 次正面 50 次反面; 情形乙: 投一枚公正硬幣 1000 次出現 500 次正面 500 次反面。請問哪一種情形發生之機率較大?

□ (A) 情形甲發生之機率較大

□ (B) 情形乙發生之機率較大

□ (C) 兩種情形發生機率相等

□ (D) 無法判斷兩者機率大小

《分析》 針對即將學習古典機率的高二社會組共 143 位學生的問卷中, 選 (A) 者有 45 人, 選 (B) 者有 47 人, 選 (C) 者有 51 人, 選 (D) 者有 0 人。經過分析學生的答題狀況與訪談資料, 本題實際答對人數 32 人, 佔 22.4% 。

(1) 選 (A) 者之理由整理如下:

S_1: 直覺上投擲愈多次變數愈大, 所以要產生 500 次正面及 500 次反面比較困難。

S_2: 因為每投一次出現正反面之機率皆為 $\frac{1}{2}$, 而投 100 次的分母比投 1000 次小。

S_3: 感覺到發生非情形乙之機率大於發生非情形甲的機率。

S_4: 從計算式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$ 可以看出來情形甲之機率較大。

S_5: 考慮排列觀點 $\frac{100!}{50!50!} > \frac{1000!}{500!500!}$ 知道情形甲之機率較大。

S_6: 前者機率 $P(\text{甲}) = \frac{\frac{100!}{50!50!}}{2^{100}} = \frac{C^{100}_{50}}{2^{100}}$, 後者機率 $P(\text{乙}) = \frac{\frac{1000!}{500!500!}}{2^{1000}} = \frac{C^{1000}_{500}}{2^{1000}}$, 因此情形甲之機率較大。

S_7: 很顯然 $\frac{1}{100} > \frac{1}{1000}$, 因此得知情形甲之機率較大。

(2) 選 (B) 者之理由整理如下:

S_1: 當投擲次數愈多的時候, 愈能使其機率接近於理論值 $\frac{1}{2}$ 。

S_2: 投擲次數愈大其誤差愈小, 正反面出現比例愈容易趨近於 $1:1$ 。

S_3: 記得在國中三年級老師說過, 實驗次數愈多其值會愈接近於 $\frac{1}{2}$ 。

S_4: 試驗次數愈多愈準確, 使達到預期結果的希望就愈大。

S_5: 由於情形乙之投擲次數較多, 比較接近於常態的情形 $\frac{1}{2}$ 。

S_6: 只要投擲愈多次, 就會使正反面的機率愈接近於 $\frac{1}{2}$ 。

S_7: 在以前學習機率的經驗中, 學過試驗次數愈大其值會愈接近於理論上該有的機率。

S_8: 投一枚公正硬幣出現正反面機率皆為 $\frac{1}{2}$, 但投 10 次未必會出現 5 次正 5 次反。當你投的次數愈多愈會符合正反面各為 $\frac{1}{2}$, 也就比較有可能使正反面比值為 $1:1$ 。

(3) 選 (C) 者其理由整理如下:

S_1: 根據簡單的比例關係知 $\frac{50}{100}=\frac{500}{1000}$, 所以兩種情形之機率應該相等。

S_2: 因為公正硬幣任何一面出現的次數都必須是相同的, 跟投擲的次數無關。

S_3: 兩者皆要求正反面出現次數達到 $\frac{1}{2}$, 才符合硬幣的公平公正原則。

S_4: 從 $\frac{50}{100}=\frac{500}{1000}$ 可得知其機率相同, 但當試驗次數愈大時比值會愈接近 $\frac{1}{2}$ 。

S_5: 在理論上兩者之機率是相同的, 但 1000 次的誤差值會較 100 次的誤差值來得小。

S_6: 既然是公正的硬幣那麼公正, 就會使出現正反面的機率相同嘛!

S_7: 我認為兩者之機率會相同, 因為投擲次數愈多會愈趨近於正反各 50% 之現象。

S_8: 在直覺上兩者機率一樣! 因為 $\frac{50}{100}=\frac{500}{1000}$ 是相同的, 其值只是放大或縮小的比例問題。

本題取自 Li, J. (2004) 對十二年級學生之訪談, 從本問卷調查可以看出, 到了高中二年級的學生, 其腦中仍然存有「試驗次數愈多, 其分配次數等於預期平均次數的機會也愈高」的迷思概念。這種錯誤恰與 Piaget 認為「試驗次數 n 愈大, $\frac{n_A}{n}$ 等於 $P(A)$ 之機率也愈大」相同。在林燈茂 (1992) 對 11−16 歲學生之相對差異與大數法則的研究中亦指出, 學生存在有「投硬幣實驗時, 正面或反面出現次數與試驗次數之半的絕對差異隨著次數增加而縮減」的錯誤。大數法則之意義表示不論正數 ε 有多小, 只要試驗次數 n 足夠大, 將可使比值 $\frac{n_A}{n}$ 出現在 $P(A)-\varepsilon$ 到 $P(A)+\varepsilon$ 之機會趨近於必然發生。事實上, 投擲一個硬幣 100 次與 1000 次來比較, 若取 $\varepsilon=\frac{1}{20}$ 時, 應用二項分佈 (Binomial distribution) 逼近常態分佈 (Normal distribution) 的估計, 可得到 100 次中出現正面次數在 45∼55 次之機率約為 0.729; 1000 次中出現正面次數在 450∼550 次之機率約為 0.998, 但在投擲 1000 次中出現正面次數在 495∼505次之機率

卻降為大約 0.272。筆者為了進一步瞭解學生在國小至國中所學的概念, 分別在三個班級課堂上對部分同學進行訪談, 從學生的回答可看出他們對大法則仍然存在種種迷思。

研究者: 回憶你們以前國中小學在學習機率時, 老師如何利用投擲硬幣來介紹機率概念?

AS42 : 記得老師說「當投擲硬幣愈多次時, 出現正面的機率會愈趨近於 $\frac{1}{2}$。」因此我認為當投 1000 次得 500 次正面比投 100 次得 50 次正面更有可能。

BS39 : 我在小學的時候曾經問過老師「只要投 1 次出現正面機率就剛好等於 $\frac{1}{2}$, 幹嘛投那麼多次呢?」當時老師並沒有回答我, 以致於現在仍然有這個疑問。

CS11 : 其實投擲一枚公正硬幣 1000 次在理論上是正反面各為 500 次, 但在實際上卻很難辦到, 因此我認為機率在理論上和實際上是有些衝突的。

根據世界上許多國家的機率教材來看, 注重教機率的頻率定義是通常的做法, 它使得機率教學能夠擺脫過去必須先學排列組合的困境, 讓機率能夠為更多的學生所瞭解和運用。然而, 從筆者上述調查的結果顯示, 高中學生在學習古典機率之前, 對頻率機率的概念仍然存在不少迷思。為了加強學生中小學所學過的此一機率概念, 筆者在課堂教學中進一步提出: 擲一公正硬幣 10 次, 請問出現正反面各 5 次的機率=?

研究者: 請問擲一公正硬幣 10 次正反面各出現 5 次的機率為何?

AS23 : 因為一枚公正硬幣出現正反面之機率為 $\frac{1}{2}$, 所以應該正反面各出現 5 次。

研究者: 那你的意思是說「10 次中正反面各會出現 5 次, 也就是投 10 次出現 5 次正 5 次反之機率是 1 囉? 」

AS17 : 老師 !我認為 10 次中出現正反面各 5 次之機率為 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ 。

研究者: 照你的講法 6 次中出現正反面各 3 次之機率也是 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 嗎?

AS17 : 對! 機率就是一種比例, 當它比例相同時其機率自然就會相同。

AS04 : 我記得以前小學的時候, 老師告訴我們投硬幣愈多次, 出現正反面各半的機會就愈大, 所以我認為投愈多次才會讓正反面的機率愈趨近於 $\frac{1}{2}$ 。

研究者: 你的意思就是投 10 次出現正反面各 5 次的機率, 要比投 6 次出現正反面各 3 次的機率大?

AS04 : 理論上不是這樣嗎? 當然投愈多次時正反面出現一半一半的機會愈大。

AS29 : 我感覺 10 次中正反面各出現 5 次之機率不是 1, 也不是 $\frac{1}{2}$ 。因為投擲硬幣 10 次, 所有可能情形共有 $2^{10}=1024$ 種, 而正反面各出現 5 次的情形有 $C_5^{10}=\frac{10!}{5!5!}=252$ 種, 所以我認為其機率 $P=\frac{C_5^{10}}{2^{10}}=\frac{252}{1024}$ 才對。

AS13： 老師! 我贊成 AS29 同學的答案, 因爲每次投硬幣都是獨立事件, 所以可以利用二項分佈的觀念, 10 次中出現 5 次正面 5 次反面的機率爲 $C_5^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{252}{1024}$, 而 6 次中出現 3 次正面 3 次反面的機率爲 $C_3^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}$。

有關學生對於上述 $\frac{5}{10}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 的迷思, 筆者認爲機率與比例的概念有關, 以致學生容易受到比例相同的影響。因此, Fischbein(1991) 對孩童關於機率理論的研究中發現, 機會 (Chance) 對學生來說是一個可能妨礙其往後學習機率 (probability) 概念的名詞, 對他們幼小心靈來說, 機率代表「任何一個都有可能發生」, 這就是此類錯誤會根深蒂固深植人心的原因。基於此, 筆者特地再把學生前面所提出的兩個解法再強調一次, 使學生瞭解投硬幣 6 次中正反面各出現 3 次的機率爲 $C_3^6\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}\fallingdotseq 0.312$, 投硬幣 10 次中正反面各出現 5 次的機率爲 $C_5^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{252}{1024}\fallingdotseq 0.246$。進而說明投一硬幣「依序」出現「正正正正正正」與「正反正反正反」之機率都是 $\left(\frac{1}{6}\right)^6=\frac{1}{64}$, 藉此也順便去除一些學生心中存在「正反正反正反」的機率比「正正正正正正」大之代表性偏誤 (representativeness bias)。

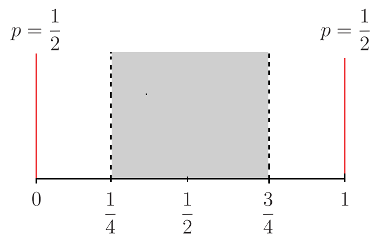
至於學生認爲硬幣每次出現正反面的機率各半, 而期待在重複試驗中正反面也出現一半一半的迷思, 可以透過 $C_3^6\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 與 $C_5^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 之比較, 讓學生在心中產生認知衝突 (cognitive conflict), 來澄清他們對大數法則的誤解, 並再次強調大數法則的意義「並不是試驗次數愈多就會讓正反面出現各半的機會增加, 也不是試驗次數愈多就會使正反面出現次數之差異愈小」, 其正確的意義是「我們只能期待隨著試驗次數的增加, 會使正反面出現次數的比值在 $\frac{1}{2}$ 附近震盪」。關於這一點, 教師可透過電腦呈現分佈圖形讓學生清楚瞭解, 對一枚製作精良的硬幣投出正反面都有相同的機會, 那麼根據大數法則可以預測出得到正面的機率會隨著試驗次數之增大而比較穩定地趨近於 $\frac{1}{2}$。

筆者也利用計算投擲硬幣 10 次出現 0 次或 1 次或 2 次或 $\cdots$ 或 10 次正面之機率 $P=C_0^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+C_1^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9+\cdots+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}(C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10})=\frac{1}{2^{10}}(2^{10})=1$, 使認爲投 10 次中會出現正反面各 5 次機率是1的學生, 產生認知衝突以達到診斷教學 (diagnostic teaching) 之目的, 並具有澄清大數法則後設認知 (metacognition) 能力。

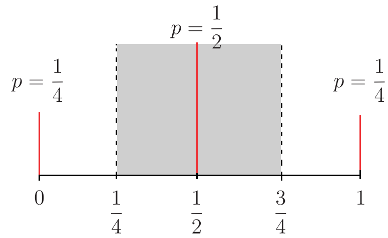
從教師應幫助學生學好數學的觀點來思考如何教數學時, 林福來等 (1997) 統整有關數學教學的研究, 認爲診斷教學與培養數學感 (mathematics sense) 是培育數學教師的兩個主軸, 其中數學感之主要目的在於訓練數學思維, 例如對一個數學式子可以用圖形或實際情境來表達, 或採取不同的觀點來說明其意義。在課堂中就曾遇到程度不錯的學生, 想要瞭解大數法則極限型式 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0$ 或 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$之內涵。筆者透過下面

動態圖示方法來描述其意義, 在各圖形中我們取 $p=\dfrac{1}{2}$, $\varepsilon=\dfrac{1}{4}$ 而頻率 $\dfrac{n_A}{n}$ 的所有可能取值爲 $0,\ \dfrac{1}{n},\ \dfrac{2}{n},\ \ldots,\ \dfrac{n-1}{n},\ 1$ 。

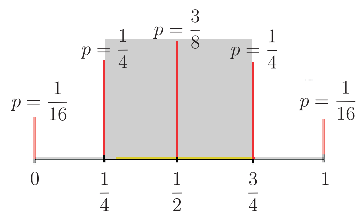
當 $n=1$ 時, 滿足 $\dfrac{1}{4}<\dfrac{n_A}{n}<\dfrac{3}{4}$ 者之機率爲 0, 亦即試驗 1 次時頻率會落在右邊灰色帶狀中之機率爲 0 。



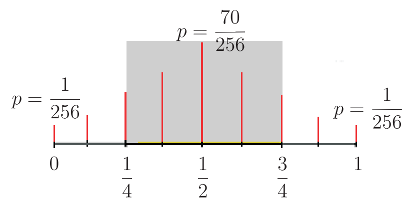
當 $n=2$ 時, 滿足 $\dfrac{1}{4}<\dfrac{n_A}{n}<\dfrac{3}{4}$ 者之機率爲 $\dfrac{1}{2}$, 亦即試驗 2 次時頻率會落在右邊灰色帶狀中之機率爲 $\dfrac{1}{2}=0.5$



當 $n=4$ 時, 滿足 $\dfrac{1}{4}<\dfrac{n_A}{n}<\dfrac{3}{4}$ 者之機率爲 $\dfrac{3}{8}$, 亦即試驗 4 次時頻率會落在右邊灰色帶狀中之機率爲 $\dfrac{3}{8}=0.375$



當 $n=8$ 時, 滿足 $\dfrac{1}{4}<\dfrac{n_A}{n}<\dfrac{3}{4}$ 者之機率爲 $\dfrac{56}{256}+\dfrac{70}{256}+\dfrac{56}{256}=\dfrac{182}{256}$, 亦即試驗 8 次時頻率會落在右邊灰色帶狀中之機率爲 $\dfrac{182}{256}\fallingdotseq 0.711$



根據上述之圖示來看, 式子 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=0$ 可解釋爲: 當 $n\to\infty$ 時, 頻率 $\dfrac{n_A}{n}$ 會落在區域 $\left|\dfrac{n_A}{n}-\dfrac{1}{2}\right|\geq\dfrac{1}{4}$ 之機率爲 0; $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$ 可解釋爲: 當 $n\to\infty$ 時, 頻率 $\dfrac{n_A}{n}$ 會落在區域 $\left|\dfrac{n_A}{n}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{4}$ 之機率趨近於 1。這種透過直觀教學來描述抽象理論的作法, 在教學策略中是另一種表徵 (representation) 的呈現, 表徵是指知識在學習者腦中的呈現與表達方式。Anghileri (2006) 認爲, 教師的教學活動是爲了支持學習而設計, 課堂中的實際操作是支持師生互動交流的關鍵。因此, 表徵是數學學習過程中很重要的一部分, 按照思維的角度從日常直觀思維過渡到形式思維, 中間最自然的鷹架 (scaffolding) 是通過幾

何圖示來表達, 學生在學習數學的過程中對於抽象的概念若沒有適當媒介幫助思考以建構自我知識, 他們可能會無法理解意義而產生學習困難, 甚至對數學失去學習的信心。

三. 古典機率旅程的發現

高中課程所探討古典機率定義如下: 設 S 是有限個樣本點所組成的樣本空間, 且每一個樣本點出現之機會均等 (equally likely), 則事件 A 在其樣本空間 S 中之機率 $P(A)$ 爲 A 的樣本點個數 $n(A)$ 與 S 的樣本點個數 $n(S)$ 之比值, 亦即 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$, 此乃拉普拉斯 (Laplace) 在 1812 年左右所提出的定義。在定義中他假設 S 中每一樣本點出現的機會均等, 這是古典機率定義非常重要的基礎概念, 也是高中機率教學中最容易被忽略的問題。雖然此限制條件有時候顯得不切實際, 但在理想上爲了簡單方便計算機率, 這是拉普拉斯定義中絕對需要的假設。例如, 當投擲一硬幣要計算擲出正面的機率, 根據拉普拉斯的古典機率, 投擲硬幣一次的樣本空間 $S=\{$正, 反$\}$, 亦即出現正面的機率爲 $\dfrac{1}{2}$。但在實際的投擲試驗中, 重複投擲一枚硬幣眞正情形可能爲: 正, 反, 反, 反, 正, 反, 正, 正, 正, 正, 正, 反, 反, 反, 反, 反 $\cdots\cdots$, 得出現正面次數與投擲次數比值依次爲 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}, \frac{6}{10}, \frac{7}{11}, \frac{7}{12}, \frac{7}{13}, \frac{7}{14}, \frac{7}{15}, \cdots\cdots$, 可清楚看出在試驗中擲出正面的相對次數並不一定爲 $\dfrac{1}{2}$。若此試驗繼續進行下去, 讓投擲次數趨近於無限多次時, 擲出正面的相對次數是否會趨近於 $\dfrac{1}{2}$ 呢? 其結果也是令人懷疑的, 這與硬幣的材質是否完全均勻也有很大的關係。但解題時又必須顧及到機會均等的條件, 所以在測驗機率的題目中往往特別強調「均勻硬幣」、「公正骰子」、「大小形狀完全相同的球」、「每張牌被取到機會相等」、$\cdots\cdots$。例如, 若投擲兩枚均勻硬幣要計算擲出一正一反的機率時, 根據拉普拉斯的古典機率, 其樣本空間是 $S=\{$正正, 正反, 反正, 反反$\}$ 而非 $\{$正正, 正反, 反反$\}$, 因爲後者不滿足每一樣本點出現機會均等的假設。爲了瞭解學生在學習古典機率時是否注意到機會均等的條件, 筆者刻意設計了一道簡單問題做更深入的調查。

情形甲: 同時投擲兩粒公正的相異骰子得點數和爲6; 情形乙: 同時投擲兩粒公正的相同骰子得點數和爲6。請問你認爲下列哪一選項正確?

☐ (A) 情形甲發生之機率較大
☐ (B) 情形乙發生之機率較大
☐ (C) 兩種情形發生機率相等
☐ (D) 無法判斷兩者機率大小

《分析》 透過調查正在學習古典機率的高二社會組共 143 人的問卷中選 (A) 者有23人, 選 (B)

者有 69 人, 選 (C) 者有 51 人, 選 (D) 者有 0 人。經由分析學生的答題狀況與訪談, 本題實際答對人數爲 42 人, 佔 29.4%。

(1) 選 (A) 者之理由如下:

S_1: 點數和爲 6 之情形有 (1, 5)、(5, 1)、(4, 2)、(2, 4)、(3, 3), 當骰子相異時得點數和 6 之機率 $P=\dfrac{6}{36}$, 當骰子相同時得點數和 6 之機率 $P=\dfrac{5}{36}$。

S_2: 情形甲發生之機率爲 $\dfrac{5}{36}$, 情形乙發生之機率爲 $\dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{5}{36}$。

S_3: 兩相異骰子出現點數和 6 之機率爲 $\dfrac{6}{36}$, 兩相同骰子出現點數和 6 之機率爲 $\dfrac{3}{36}$。

S_4: 情形甲有 (1, 5)、(5, 1)、(4, 2)、(2, 4)、(3, 3) 五種, 因此其機率是 $\dfrac{5}{36}$; 情形乙有 (1, 5)、(2, 4)、(3, 3) 三種, 因此其機率是 $\dfrac{3}{36}$。

S_5: 情形甲得點數和 6 之情形有 (1, 5)、(3, 3)、(5, 1)、(4, 2)、(2, 4)、(3, 3) 六種, 因此其機率爲 $P=\dfrac{6}{36}$; 情形乙得點數和爲 6 之情形有 (1, 5)、(5, 1)、(2, 4)、(4, 2)、(3, 3) 五種, 因此其機率是 $\dfrac{5}{36}$。

S_6: 兩骰子爲相異時得情形甲之機率是 $\dfrac{C_1^3\cdot 2!}{6\cdot 6}=\dfrac{1}{6}$; 兩骰子爲相同時得情形乙之機率是 $\dfrac{C_1^3}{H_2^6}=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$。

S_7: 相當於考慮方程式 $x+y=6$ 非負整數解的情形, 因此得到情形甲之機率爲 $\dfrac{H_4^2\cdot 2}{36}=\dfrac{10}{36}$; 得到情形乙之機率爲 $\dfrac{H_4^2}{36}=\dfrac{5}{36}$ 。

(2) 選 (B) 之理由如下:

S_1: 相異骰子之樣本空間的樣本點共有 $6\cdot 6=36$ 種, 得其機率爲 $\dfrac{5}{36}$; 相同骰子之樣本空間的樣本點共有 $H_2^6=C_2^7=21$ 種, 得其機率爲 $\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$ 。

S_2: 當兩骰子相異時得點數和 6 之機率爲 $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$, 兩骰子相同時得點數和 6 之機率爲 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ 。

S_3: 兩骰子相異時得點數和 6 之機率爲 $\dfrac{2\cdot 2+1}{6\cdot 6}=\dfrac{5}{36}$, 兩骰子相同時得點數和 6 之機率爲 $\dfrac{1}{2!}\cdot\dfrac{3}{6\cdot 6}=\dfrac{3}{72}$ 。

S_4: 因爲相同骰子所產生之情況數較少, 使得它發生的機率會相對較大。

S_5: 將兩相異骰子之樣本空間的元素全部列出來有 36 種, 點數和爲 6 者有 5 種, 得到其機率 $P=\dfrac{5}{36}$; 將兩相同骰子之樣本空間的元素全部列出來有 21 種, 點數和爲 6 者

有 3 種, 得到其機率 $P=\dfrac{3}{21}$ 。

(3) 選 (C) 者之理由如下:

S_1: 投擲兩粒公正相同骰子與相異骰子, 其點數和爲 6 的機率關鍵在於是否公正, 與骰子相同或相異根本無關。

S_2: 在求機率時相同物也要視爲相異物, 才能滿足每一樣本點出現機會均等, 因此其機率皆爲 $\dfrac{6}{6\cdot 6}=\dfrac{1}{6}$ 。

S_3: 兩種情形的骰子既然都是公正的, 所以出現任一點的機率都是 $\dfrac{1}{6}$, 可以不必討論骰子相同或相異。

S_4: 在求機率時相異物必須看成相同物, 所以兩種情發生之機率皆爲 $\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$ 。

S_5: 不管相同或者相異骰子由於每面出現機會均等, 所以兩者出現之機率皆爲 $\dfrac{5}{36}$ 。

S_6: 因爲投擲骰子都是一種獨立事件, 所以兩種情形發生之機率皆爲 $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$ 。

S_7: 不論骰子相異或相同, 投兩個骰子之點數和的所有情形有 2 、3 、4 、5 、6 、7 、8 、9 、10 、11 、12 共 11 種, 所以得到點數和爲 6 之機率皆爲 $\dfrac{1}{11}$ 。

這是一道非常基本的古典機率問題, 觀察此問題之答對學生卻只有 51 人, 若再仔細分析學生所提供之答案與理由, 可發現學生受到學習排列組合的影響, 將本題複雜化而產生很多錯誤的解法。本題令筆者感到好奇的是, 不少排列組合學得不錯的學生, 大都選擇了選項 (A) 或選項 (B), 爲了更進一步瞭解這些學生心中的想法, 筆者進行了下面的訪談:

研究者: 你認爲本題中之兩種情形發生的機率各爲何?

BS14 : 投兩個相異骰子的所有情形共有 $6\cdot 6=36$ 種, 所以其機率是 $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$; 投兩個相同骰子的所有情形爲 $H^6_2=21$ 種, 而出現點數和爲 6 之情形有 3 種, 所以其機率是 $\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$。因此, 情形甲之機率 $\dfrac{1}{6}$ 大於情形乙之機率 $\dfrac{1}{7}$。

研究者: 投兩個相異骰子出現點數和是 6 點的情形爲何會有 6 種 ?

BS14 : 點數和爲 6 者有 (1, 5) 、(2, 4) 、(3, 3), 因爲兩個骰子相異時各要看成兩種, 所以共有 6 種情形。

研究者: 你的意思就是 (1, 5) 有兩種, 而 (3, 3) 也有兩種情形 ?

BS14 : 對! (1, 5) 要視爲有 (1, 5) 與 (5, 1) 兩種, 而 (3, 3) 也要看成有 (3, 3) 與 (3, 3) 兩種。

研究者: 請問 (3, 3) 與 (3, 3) 不是同一種嗎 ?

BS14 : 怎麼會呢 ? 明明是兩個相異的骰子耶 ! 所以當然要將 (大 3, 小 3) 與 (小 3, 大 3) 看成不同。

研究者: 那你將兩個相異骰子出現所有可能 36 種情形列出來看看。

BS14 : (1, 1)、(1, 2)、(1, 3)、(1, 4)、(1, 5)、(1, 6)、(2, 1)、(2, 2)、(2, 3)、(2, 4)、(2, 5)、(2, 6)、(3, 1)、(3, 2)、(3, 3)、(3, 4)、(3, 5)、(3, 6)、(4, 1)、(4, 2)、(4, 3)、(4, 4)、(4, 5)、(4, 6)、(5, 1)、(5, 2)、(5, 3)、(5, 4)、(5, 5)、(5, 6)、(6, 1)、(6, 2)、(6, 3)、(6, 4)、(6, 5)、(6, 6)。

研究者: 你看 (1, 5) 與 (5, 1) 是不是出現兩次?

BS14 : 是啊!

研究者: 你再看看 (3, 3) 出現幾次呢?

BS14 : 只有 1 次, 我已經瞭解錯在哪裡了。

研究者: 你認爲本題中兩種情形之機率各爲何?

CS28 : 投兩個相異骰子之樣本空間中有 $6 \cdot 6 = 36$ 個樣本點, 出現點數和 6 的有 (1, 5)、(5, 1)、(4, 2)、(2, 4)、(3, 3), 所以其機率爲 $\dfrac{5}{36}$; 投兩個相異骰子之樣本空間有 $H^6_2 = 21$ 個樣本點, 出現點數和 6 的有 (1, 5)、(2, 4)、(3, 3), 所以其機率爲 $\dfrac{3}{21}$。因此, 情形甲之機率 $\dfrac{5}{36}$ 小於情形乙之機率 $\dfrac{3}{21}$ 。

研究者: 對嗎? 請你回憶一下老師上課時怎麼定義古典機率?

CS28 : 事件 A 在其樣本空間 S 中之機會比率 $P(A) = \dfrac{A\text{之元素個數}}{S\text{之元素個數}}$。

研究者: 你忽略了樣本空間中每個樣本點出現機會均等的條件, 有沒有印象?

CS28 : 不是樣本空間中有 n 個元素時, 每一個樣本點出現機會都是 $\dfrac{1}{n}$ 嗎?

研究者: 你把投擲兩個相同骰子的樣本空間看成有 21 個情形, 這 21 種情形發生的機會並不均等。例如 (1, 5) 與 (3, 3) 出現的機會並不相同, 因爲 (1, 5) 的來源有 (1, 5)、(5, 1) 兩種而 (3, 3) 之來源卻只有一種。

CS28 : 老師您忘了這是兩個相同骰子哦! 對相同骰子來説得 (1, 5) 和 (5, 1) 不是同一種嗎?

研究者: 在計算機率時爲了要滿足樣本空間中每樣本點出現機會均等的條件, 我們必須把相同的骰子視爲不同來處理, 不妨視之爲大小兩個骰子吧! (1, 5) 的來源有 (大 1, 小 5)、(大 5, 小 1) 兩種, (3, 3) 的來源只有 (大 3, 小 3) 一種, (大 1, 小 5)、(大 5, 小 1)、(大 3, 小 3) 出現的機會都是 $\dfrac{1}{36}$, 如此才能滿足每一樣本出現的機會均等條件。

CS28 : 所以爲什麼在計算機率時老師要我們把相同視爲不同來處理, 就是爲了要滿足每一樣本點出現機會均等的條件。

研究者: 答對了。

CS28 : 我現在才眞正搞懂老師計算機率時爲何要將相同物視爲不同物來處理。

至於古典機率定義中每一樣本點出現機會均等條件, 筆者對 A 班進行了一節 50 分鐘的補充教學, 並以骰子作爲啓蒙例 (generic example) 來導入這個容易被忽略的概念。

研究者: 請問投擲兩個骰子出現點數和是 6 之機率爲何?

AS01 : 所投擲的兩個骰子是相同或相異呢?

研究者: 有關係嗎 ?

AS01 : 老師您在教排列組合時不是告訴我們投擲兩個相同骰子出現情形有 $H_2^6 = C_2^7 = 21$ 種, 而投擲兩個相異骰子出現情形有 $6^2 = 36$ 種嗎 ?

研究者: 對啊! 但在計算機率問題時不論是碰到相同或相異骰子, 往後我們都要將之視爲相異來處理。

AS01 : 爲什麼呢 ? 當骰子相同時點數和是 6 的事件 $A = \{(1,5),(3,3),(2,4)\}$, 得其機率爲 $P(A) = \dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$; 當骰子相異時點數和是 6 的事件會變成 $A = \{(1,5),(5,1),(3,3),(2,4),(4,2)\}$, 得其機率爲 $P(A) = \dfrac{5}{36}$, 兩者之答案明顯是不一樣耶!

研究者: 將相同骰子視爲相異骰子來考慮, 就是爲了要滿足樣本空間中每一個樣本點出現機會均等, 有沒有同學能夠幫老師說明一下 ?

AS18 : 因爲不論相同或相異的骰子, 投出兩個之點數和的樣本空間 $S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$。因此, 得到點數和是 6 之機率 $P = \dfrac{1}{11}$, 對吧 !

從上面的對話中又發現學生在處理古典機率問題時, 並沒有注意到拉普拉斯古典定義中, 樣本空間每個樣本點出現機會均等的條件, 且對於爲何要將相同骰子視爲相異骰子來處理也不甚瞭解。爲了一一否定 AS18 與 AS01 兩位學生的答案, 筆者採取了一連串的認知衝突之教學策略。

研究者: 在 AS18 同學所提的樣本空間 S 中, 樣本點 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 出現的機會相等嗎 ?

AS21 : 點數和 2 是由 (1, 1) 所組成, 點中和 3 是由 (1, 2) 和 (2, 1) 所組成, ..., 所以很顯然它們出現的機會不均等。

研究者: 當樣本空間中每個樣本點出現機會不均等時, 不可逕用拉普拉斯古典機率定義求機率。如果直接利用 AS18 所提的樣本空間, 將得到出現點數和爲 2 或 3 或 $\cdots\cdots$ 或 11 之機率皆爲 $\dfrac{1}{11}$ 之不合理現象。

AS01 : 那我所提的解法中分成骰子相異或相同來討論有錯嗎 ? 請老師說明一下好嗎 ?

研究者: 如果按照排列組合的觀點, 投擲兩個相同的骰子有 $H_2^6 = 21$ 種如下: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)。若用這 21 個樣本點構

成樣本空間, 則 (3, 3) 與 (1, 5) 出現的機會並不相等, 因爲 (1, 5) 的來源有 (1, 5) 和 (5, 1) 兩種, 而 (3, 3) 之來源只有一種 (3, 3)。

AS01： 對於相同骰子來說 (1, 5) 與 (5, 1) 代表不就是同一種情形嗎？

研究者: 在計算機率時爲了要滿足樣本空間中每個樣本點出現機會均等, 我們必須將樣本空間 S 作適當的修正, 使得 S 中每個樣本點出現機會均等。要達到此一目的, 我們令 $S=\{(x,y)\mid x=1,2,3,4,5,6;\ y=1,2,3,4,5,6\}$, 亦即樣本空間 S 中之元素個數有 $6\cdot 6=36$ 個, 而點數和是 6 的事件 $A=\{(1,5),(5,1),(3,3),(2,4),(4,2)\}$, 故得 $P(A)=\dfrac{5}{36}$。

AS33： 我還是不懂, 爲什麼要把相同骰子視爲相異骰子來計算機率呢？

研究者: 舉個更簡單的例子吧! 假設袋中有 5 個相同紅球與 2 個相同白球, 今從袋中任取 1 球, 請問取到白球的機率爲何？本題若取樣本空間 $S=\{R,W\}$, 所求事件 $A=\{W\}$, 其中 R 表紅球而 W 表白球, 因此我們可得 $P(A)=\dfrac{1}{2}$, 對嗎? 憑各位的直覺顯然是不對的。若按古典機率的定義, 可以發現取到紅球與取到白球之機會並不相等, 不能馬上使用古典機率的定義來求機率。那麼怎麼辦呢? 爲達到樣本空間 S 中每一樣本點出現機會均等, 我們必須將 5 個相同紅球視爲不同的球 R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, 將 2 個相同白球視爲不同的球 W_1, W_2, 因此得到新樣本空間 $S=\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,W_1,W_2\}$, 新事件 $A=\{W_1,W_2\}$, 故取到白球之機率 $P(A)=\dfrac{2}{7}$。所以, 爲什麼老師要提醒你們在計算機率時不管是相同或相異, 都要一律視爲相異來處理的原因在此。

AS33： 我終於懂了, 謝謝老師。

根據筆者分析世界各國的高中機率教材, 發現大部分國家都只介紹一些簡單排列組合當作工具, 很少像台灣仍然將機率緊接於排列組合課程之後, 而且在排列組合中介紹重複組合的觀念, 以致產生了樣本空間中元素的個數採取重複組合處理的錯誤現象。因此, 在高中學習機率前是否有必要將排列組合作一番詳細深入的研究, 値得課程開發人員作更周詳的思考和討論。

四. 這趟教學之旅的回顧

在高中階段的機率課程不可能講得很透徹, 但也不能將課程內容環繞在古典機率打轉。頻率機率是機率教學的基本起點, 它主要讓學生體會統計性思維與確定性思維的差異, 使學生注意到統計結果之隨機性, 並瞭解統計推斷是有可能犯錯的。因此, 筆者認爲頻率機率在高中階段有必要再做介紹, 並進一步說明機率與頻率是有差異的。記得在吳大猷文集中有一段笑話: 一位病人必須動高風險手術, 病人詢問這項手術的成功率有多大？醫師說大約只有五分之一。但他

安慰病人說:「你不必擔心, 你到我這兒來看病是十分幸運的, 因爲最近有四個患你這種病的來這裡動手術都已經死了, 你正好是第五位幸運者。」這個笑話就混淆了頻率與機率的概念, 此概念不正是 “投擲 1000 次公正硬幣中, 恰會出現 500 次正面” 的直觀迷思嗎 ? 其次, 排列組合是計算古典機率的常用工具, 但也並非是必要的工具。機率教學的核心目標是讓學生瞭解隨機性, 使學生學會用隨機觀念去描述和分析隨機現象, 建立在隨機觀念下的排列組合才是解決機率問題的最佳途徑。個人參考西方各國的機率教材, 大都已經避開了複雜的排列組合計算, 而儘量以樹形圖和面積模型來計算機率, NCTM (2000) 從六～八年級就提出這項要求, 目前台灣高中教科書竟然反其道的將幾何機率排除, 令人匪夷所思。因此, 筆者建議不要花太多時間介紹排列組合, 否則就會讓更多優秀學生陷入等機率偏誤 (equiprobability bias) 中無法自拔。事實上, 若在國中小學進行較多有關隨機的模擬試驗, 到了高中學習機率時就比較能順利的進行相關教學。筆者認爲對於在實驗中所產生的偏差, 正可呈現機率統計具有不確定之特點, 這足以加深學生體驗其每次作實驗會有不同結果的可能, 並將之當作理論與實際間最佳的聯繫橋樑。

在這趟教學之旅過程中, 筆者深深體會出同樣的教材由不同的教師來教, 經常會收到不同的學習效果, 而相同的內容透過不同教師的詮釋也會讓學生感受到不同的難易程度。在機率問題的學生解法策略中常存在許多的錯誤, 從學生錯誤解法所獲得的資訊, 往往比正確解法所得到的訊息更有助於教學的設計。由於機率課程之有意義學習 (meaningful learning) 大都是概念性的學習, 教學時若能適當的引導學生之後設認知, 將可增進對學生如何進行學習有所掌握, 這對改進教學內容與教學方法會有很大的幫助。Skemp (1987) 在其著名的數學學習心理學一書中曾做了如下的描述「 $\cdots$ 這趟心智之旅有三十年之久, 它開始於數學課堂, 也終止於數學課堂, $\cdots$ 在當了五年的數學教師之後, 愈來愈覺得自己教得不理想, 於是又重新進入大學校園學習心理學, $\cdots$」(陳澤民, 1995)。在他看來只有在心理學領域才能找到數學教學產生問題的解答, 也才可以給數學學習者提供一個合適的教學理論, 這促使他開始了長達三十年漫長的思索。筆者認爲, 教師不但要具備足夠的學科專業知識, 也要充實自己一些認知心理學的概念, 才能在近側發展區 (zone of proximal development) 提供學生學習的鷹架。Leatham (2006) 主張, 教師也必須積極扮演研究者之角色, 否則便容易產生教師的敍述與研究者的解讀存在不一致的誤解。鄭英豪 (2000) 指出, 一位教師若能以較具批判性的態度去反思自己的教學, 藉由質疑以及實作的過程, 則對於教學將能引發出各種不同的策略。因此, 唯有通過觀察與反思的教學, 教師才能實現對學生之理解提供更有利的幫助。

參考文獻

1. 王幼軍, 拉普拉斯概率理論的歷史研究, 上海交通大學科學史與科學哲學系博士論文, 上海交通大學出版社, 2007。

2. 林燈茂, 11∼16歲學生之「相對差異」與「大數法則」概念初探, 彰化師範大學科學教育研究所碩士論文 (未出版), 1992。
3. 林福來等, 教學思維的發展—整合數學知識的教材教法, 行政院國科會專題研究計劃 (計劃編號 NSC 86-2511-S-003-025), 1997。
4. 陳澤民譯, 數學學習心理學 (The Psychology of Learning Mathematics, R. R. Skemp 著), 台北九章出版社, 1995。
5. 趙小平等, 借鑒國外經驗 改進概率教學, 數學教學, 第3期 (總第168期), 上海華東師範大學數學系, 2000。
6. 鄭英豪, 學生教師數學教學概念的學習: 以概念啓蒙例的教學概念爲例, 台灣師範大學數學教育研究所博士論文 (未出版), 2000。
7. Anghileril, J., *Scaffolding practices that enhance mathematics learning*, Journal of Mathematics Teacher Education, Vol. 9, p.33-52, 2006.
8. Borovcnik, M., Bentz, H. J. and Kapadia, R., *A probabilistic perspective*, In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), Chance Encounters: Probability in Education (p.27-71). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
9. Fischbein, E., *Intution in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Dordrecht:Reidel Publishing company, 1987.
10. Hawkins, A. and Kapadia, R., *Childrens' conceptions of probability: A psychological and pedagogical review*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 15, p.349-377, 1984.
11. Koirala, H. P., *Preservice teachers' conceptions of probability in relation to its history*, Proceedings of the 22^{nd} Conference of the Inetrnational Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, p.135-142, 1998.
12. Konold, C., *Understanding students' beliefs about probability*, In E. von Glasersfeld(Ed.), Radical Constructivism in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic publisher, 1991.
13. Leatham, K. R., *Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems*, Journal of Mathematics Teacher Education, Vol. 9, p.91-102, 2006.
14. Li, J., *Chinese students understanding of probability*, Unpublished doctoral dissertation, National Institute of Education. Nanyang Technological University, Singapore, 2000.
15. Li, J., *A study on misconceptions in probability*, In Jianpan Wang. & Binyan Xu (Eds.), Trend and Challenges in Mathematics Education (p. 61-70). Shanghai: East China Normal University Press, 2004.
16. National Council of Teachers of Mathematics, 2000. Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.
17. Piaget, J. and Inhelder, B., *The Origin of the Idea of Chance in Children*, (L. Leake, Jr. P. Burrell & H. D. Fishbein trans.). London: Routledge & Kegan Paul Ltd, 1975.
18. Shaughnessy, J. M., *Research in probability and statistics*, In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (p.465-494). New York: Macmillan Publishing Company, 1992.
19. Steinbring, H., *The Theoretical Nature of Probability in the Classroom*, In Kapadia, R. & Borovcnik, M. (Eds.), Chance Encounters: Probability in Education (p.135-167). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

———本文作者爲數學教育博士, 目前積極參與數學教育理論與實踐之研究———