數學傳播 32卷3期, pp. 75-79

費馬——斯坦勒爾問題與平衡態公理

張　雄

摘要: 平衡態公理 (最小勢能原理) 爲解決費馬問題提供了力學依據, 用不同的數學方法進行了證明。同時, 用平衡態公理和數學方法相結合解決費馬—斯坦勒爾問題更簡單。

關鍵字: 費馬—斯坦勒爾問題, 平衡態公理, 偏導數, 幾何證明。

1. 費馬問題

1640年, 費馬提出問題: 平面上給定三個點 A, B, C, 求一點 P 使 $PA+PB+PC$ 最小。

此即費馬問題, 這個所求點 P 稱爲費馬點。關於費馬點的存在性, 可以用力的平衡原理來考慮: 因爲作用在這一點的三個相等的力要平衡的話, 它們的合力爲零, 三個力各指向這一點和 $\triangle ABC$ 三頂點連線的方向, 且三者互相夾角爲 $120°$。所以, 該點一定存在, 且這一點到三頂點連線的夾角均爲 $120°$ (當 $\triangle ABC$ 的內角均小於 $120°$ 時, 在 $\triangle ABC$ 內一定有點 P, 使 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$; 當 $\triangle ABC$ 的內角有不小於 $120°$ 者, $\triangle ABC$ 內滿足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$ 的點 P 不存在, 根據問題條件 P 點又不可能在 $\triangle ABC$ 外, 易知所求點 P 應在最大內角頂點處)。該原理較詳細的推導, 我們將在後面更一般化的斯坦勒爾問題中進行。

用數學方法進行推導, 先建立平面直角坐標系 xoy, 設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, $P(x,y)$, 則使

$$W=f(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

取最小値的點 P 就是所求的費馬點。

現在可以通過對 W 求 x, y 的偏導數求得 P。要使 W 在 $\triangle ABC$ 的內部取最小値, 必有 $\frac{\partial w}{\partial x}=0$, $\frac{\partial w}{\partial y}=0$, 從而得:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}=0,\ \sum_{i=1}^{3}\frac{y-y_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}=0, \tag{1}$$

考慮三維向量: $\overline{X}=(x-x_1,x-x_2,x-x_3)$、$\overline{Y}=(y-y_1,y-y_2,y-y_3)$、$\overline{R}=(\frac{1}{r_1},\frac{1}{r_2},\frac{1}{r_3})$ (記 $r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$)。

由 (1) 及向量的點積公式可知 $\vec{X}\cdot\vec{R}=0$, $\vec{Y}\cdot\vec{R}=0$。因此向量 $\vec{R}$ 垂直於向量 $\vec{X}$、$\vec{Y}$ 所在的平面, $\vec{R}//\vec{X}\times\vec{Y}$。再由向量叉積公式可知

$$\begin{aligned}\vec{X}\times\vec{Y}&=\left(\begin{vmatrix}x-x_2 & x-x_3\\ y-y_2 & y-y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x-x_3 & x-x_1\\ y-y_3 & y-y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x-x_1 & x-x_2\\ y-y_1 & y-y_2\end{vmatrix}\right)\\&=\pm(2S_{\triangle PBC},2S_{\triangle PCA},2S_{\triangle PAB})\\&=\pm(r_2r_3\sin\angle BPC,r_3r_1\sin\angle CPA,r_1r_2\sin\angle APB)\end{aligned}$$

因爲 $\vec{R}//\vec{X}\times\vec{Y}$, 所以 $\vec{R}=\lambda(\vec{X}\times\vec{Y})$, 即

$$(\frac{1}{r_1},\frac{1}{r_2},\frac{1}{r_3})=\lambda(\vec{X}\times\vec{Y})$$

從而可知 $\sin\angle BPC=\sin\angle CPA=\sin\angle APB=\dfrac{1}{\lambda r_1r_2r_3}$。因此, 所求點 P 滿足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$。

下面介紹找出點 P 的幾何方法 (只就 $\triangle ABC$ 的內角均小於 120° 的情形)。

方法一: 以 $\triangle ABC$ 的各邊爲邊長向外作正 $\triangle ABD$、正 $\triangle BCE$、正 $\triangle CAF$, 很容易證明這三個正三角形的外接圓交於一點 P, P 爲費馬點 (實際上作兩個外接圓就可確定交點 P)。

方法二: 由 $\triangle ABC$ 的三邊爲邊長向外作正 $\triangle ABD$、正 $\triangle BCE$、正 $\triangle CAF$, 則 AE、BF、CD 三線共點且此點就是所求點 P。

證明: 如圖1, 設 BF、CD 相交於點 P, 連 AP、EP。由於 $\triangle ACD\cong\triangle AFB$, $\therefore\angle ACP=\angle AFP$。從而 A、F、C、P 四點共圓。得 $\angle CPF=\angle CAF=60^\circ$, $\angle APF=\angle ACF=60^\circ$。$\therefore\angle APC=120^\circ$。同理可得, $\angle APB=120^\circ$。那麼 $\angle BPC=120^\circ$。又由於 $\angle BEC=60^\circ$。$\therefore B$、E、C、P 四點共圓。從而 $\angle BPE=\angle BCE=60^\circ$, 又 $\angle APB=120^\circ$。$\therefore A$、P、E 三點共線。故 AE、BF、CD 三線交於一點 P。

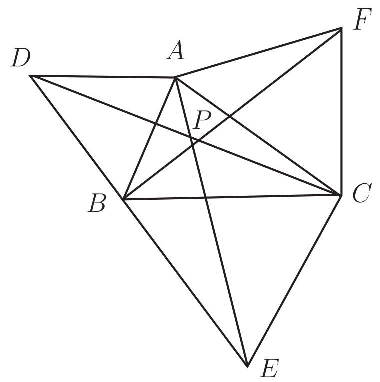

圖1

如圖2, 設 G 爲 $\triangle ABC$ 內異於點 P 的任一點, 延長 AP 到 F, 使 $PE = PB$, $EF = PC$, 即 $AF = PA + PB + PC$。在 $\triangle ABC$ 內, 連接 GA、GB、GC, 以 GB 爲一邊作正 $\triangle GBM$, 連接 MF、BF, 在 $\triangle PBC$ 與 $\triangle EBF$ 中, $PC = EF$, $PB = EB$, $\angle CPB = \angle FEB = 120°$, 所以 $\triangle PBC \cong \triangle EBF$。

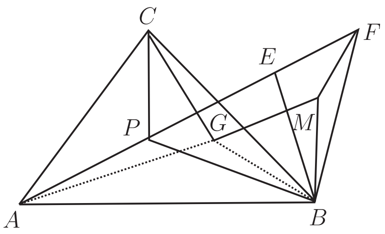

圖2

從而 $\angle PBC = \angle EBF$, $BC = BF$。在 $\triangle GBC$ 與在 $\triangle MBF$ 中, 因爲 $\angle GBM = \angle PBE = 60°$, $\therefore \angle GBP = \angle MBE$, 從而 $\angle GBP + \angle PBC = \angle MBE + \angle EBF$, 即 $\angle GBC = \angle MBF$。又 $GB = MB$, $BC = BF$。$\therefore \triangle GBC \cong \triangle MBF$, 則 $GC = MF$。因此,

$$GA + GB + GC = AG + GM + MF > AF = PA + PB + PC.$$

故 P 點到 A, B, C 三點距離之和爲最小。

2. 費馬—斯坦勒爾問題與平衡態公理 (勢能最小原理)

費馬—斯坦勒爾問題: 設 A, B, C 是三個礦井, 其每日的礦石產量分別爲 k_1、k_2、k_3。今需選擇一個地點 P 將三礦井每日所產礦石集中, 以便統一處理後運走。問應如何選擇 P 點才能使集中礦石所需的運輸量 $k_1PA + k_2PB + k_3PC$ 最小?

這一問題顯然是前面問題的推廣 (加權)。

平衡態公理: 獨立體系最終總是趨於一個能量儘量低的穩定狀態, 而永遠不能自動地離開它; 該平衡態是唯一的。這一原理也稱爲勢能最小原理。

我們關心的是下面兩層意思: 能量最低, 即存在最小值; 平衡包括力學平衡、熱學平衡等, 也就是存在一系列等式。平衡存在, 不一定是能量最低; 能量最低, 則必然存在平衡, 這是我們把該原理引入數學問題解決的依據。

如圖3所示, 在 $\triangle ABC$ 所在平面內的 A、B、C 三點各鑽一個孔, 然後將三條繩子繫在一起, 設結點爲 P, 繩子分別穿過三孔, 繩下所受重力分別爲 q_1、q_2、q_3 的物體各一件, 當它們平衡時, 它們離地面的高度分別爲 h_1、h_2、h_3, 則整個系統的勢能, 即三個重物勢能之和爲 $E = q_1h_1 + q_2h_2 + q_3h_3$。又設結點 P 到 A、B、C 三點的距離爲 r_1, r_2, r_3 且繫三重物的繩長分別爲 l_1, l_2, l_3, 又若平面離地面高度爲 h,

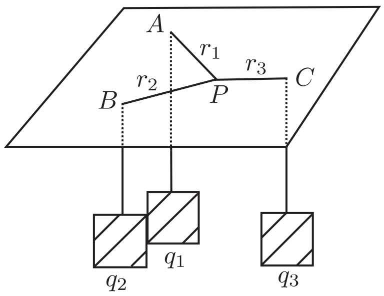

圖3

則有 $r_i+(h-h_i)=l_i$ $(i=1,2,3)$, 即 $h_i=r_i+h-l_i$, 故前式可寫爲 $E=q_1r_1+q_2r_2+q_3r_3+c$, 其中 $c=(q_1+q_2+q_3)h-(q_1l_1+q_2l_2+q_3l_3)=$ 常量。顯然當系統處於平衡時勢能 E 最小, 即 $q_1r_1+q_2r_2+q_3r_3=E-c$ 最小。

而平衡態公理又告訴我們: 當該體系達到平衡狀態時, 必然存在力學平衡, 即繩結 P 所受的合外力爲零。根據力的合成, 我們便可得到這個點所滿足的數量關係爲:

$$\frac{\sin\angle BPC}{q_1}=\frac{\sin\angle CPA}{q_2}=\frac{\sin\angle APB}{q_3}.$$

下面略證滿足上式的點 P 即爲所求點。

若 P 滿足上式, 如圖4所示, 過 A, B, C 三點分別作 PA、PB、PC 的垂線, 垂線構成的三角形爲 $\triangle DEF$。考慮角的互補, 顯然有

$$\sin\angle D=\sin\angle BPC,$$
$$\sin\angle E=\sin\angle CPA,$$
$$\sin\angle F=\sin\angle APB.$$

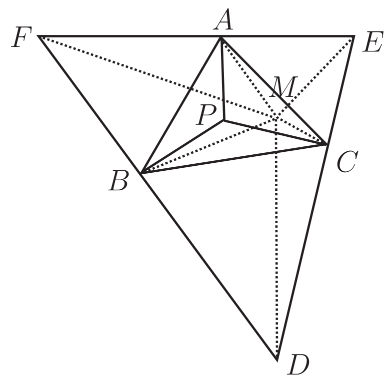

圖4

又在 $\triangle DEF$ 中, 用正弦定理, 有

$$\frac{EF}{\sin\angle D}=\frac{FD}{\sin\angle E}=\frac{DE}{\sin\angle F}=2R$$

(其中 $2R$ 爲 $\triangle DEF$ 外接圓直徑), 則

$$\sin\angle BPC=\frac{EF}{2R},\ \sin\angle CPA=\frac{FD}{2R},\ \sin\angle APB=\frac{DE}{2R},$$

從而得

$$\frac{EF}{q_1}=\frac{FD}{q_2}=\frac{DE}{q_3}=k\quad(\text{常數})。$$

又

$$\begin{aligned}S_{\triangle DEF}&=S_{\triangle EPF}+S_{\triangle FPD}+S_{\triangle DPE}\\&=\frac{1}{2}(EF\cdot PA+FD\cdot PB+DE\cdot PC)\\&=\frac{k}{2}(q_1PA+q_2PB+q_3PC).\end{aligned}$$

又若 M 爲 $\triangle ABC$ 內異於 P 的另外一點, 顯然有

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}(q_1MA+q_2MB+q_3MC)&=\frac{1}{2}(EF\cdot MA+FD\cdot MB+DE\cdot MC)\\&\ge S_{\triangle MEF}+S_{\triangle MDF}+S_{\triangle MDE}=S_{\triangle DEF}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{k}{2}(q_1PA+q_2PB+q_3PC)\le\frac{k}{2}(q_1MA+q_2MB+q_3MC),$$

即

$$q_1PA+q_2PB+q_3PC=q_1r_1+q_2r_2+q_3r_3\le q_1MA+q_2MB+q_3MC.$$

當 $q_1=q_2=q_3$ 時, 即爲費馬問題。

例. 設平面 xoy 上有三點 $O(0,0)$, $P(12,0)$, $Q(8,6)$, 求 $W=5|RO|+4|RP|+3|RQ|$ 取最小值時 R 的坐標?

設 R 的坐標爲 (x,y), 於是

$$W=5\sqrt{x^2+y^2}+4\sqrt{(x-12)^2+y^2}+3\sqrt{(x-8)^2+(y-6)^2}.$$

通過對 W 求 x, y 的偏導數 $\dfrac{\partial W}{\partial x}$、$\dfrac{\partial W}{\partial y}$ 可得。

如果用平衡態公理則簡潔的多。可令 $q_1=5N$, $q_2=4N$, $q_3=3N$, 繩結的坐標爲 R', 則體系的勢能爲 $W'=5|R'O|+4|R'P|+3|R'Q|$。根據平衡態公理, R' 所受的合外力爲零, 由力的合成得

$$\angle PR'Q=90^\circ,\ \angle OR'P=\cos^{-1}(-0.8),\ \angle OR'Q=\cos^{-1}(-0.6).$$

然後, 過點 Q, R', P 作圓, 圓心坐標爲 $S(10,3)$; 過 O, R', P 作圓, 圓心爲 T, 因爲 $\angle OR'P=\cos^{-1}(-0.8)$, 所以 $\overparen{OP}$ 所對的圓心角爲 $2\sin^{-1}0.6$, 則 $\frac{1}{2}\angle OTP=\sin^{-1}0.6$, 從而 T 的坐標爲 $(6,-8)$。

由此可得, R' 在圓 $(x-10)^2+(y-3)^2=13$ 和 $(x-6)^2+(y+8)^2=100$ 上。解得 R' 的坐標爲 $(\frac{896}{137},\frac{272}{137})$ 時, $W=5|RO|+4|RP|+3|RQ|$ 有最小值。

參考文獻

1. 堵丁柱, 談談斯坦納樹, 數學通報, 1995年第1期。
2. 王申懷, 利用導數求費馬問題的解, 數學通報, 1995年第11期。
3. 張雄、李得虎, 數學方法論與解題研究, 北京: 高等教育出版社, 2003年8月版。

—本文作者任教陝西教育學院數理工程系—