數學傳播 32卷3期, pp. 72-74

雙曲函數

劉江楓

1. 直角雙曲線

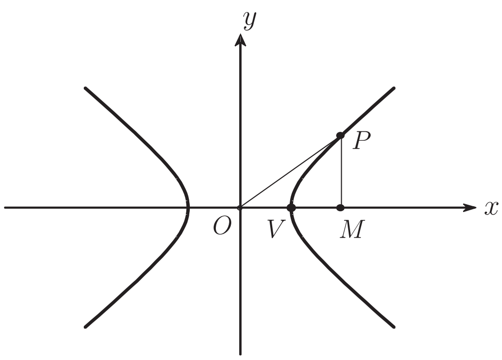
令 F 及 d 分別爲平面上的定點及給定直線, 且令 e 爲正實數, 則點 P 滿足 $PF=ePd$ (其中記號 Pd 表示點 P 到直線 d 的距離) 的軌跡稱爲圓錐曲線。點 F 稱爲此圓錐曲線的焦點, 直線 d 稱爲此圓錐曲線的準線, 而正實數 e 稱爲此圓錐曲線的離心率。

當 $e<1$ 時, 這個圓錐曲線是個橢圓, 它是一個具有中心對稱的封閉曲線。當 $e=1$ 時, 這個圓錐曲線是個拋物線, 它是一個雙側對稱的開曲線。當 $e>1$ 時, 這個圓錐曲線是個雙曲線, 它是具有兩個分支的開曲線, 並且整個軌跡是中心對稱。

離心率爲 $\sqrt{2}$ 的雙曲線稱爲直角雙曲線。在座標平面上, 令點 F 的座標爲 $(\sqrt{2},0)$ 且令直線 d 的方程式爲 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 令點 V 爲 $(1,0)$。因爲 $VF=\sqrt{2}-1=\sqrt{2}(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, 故點 V 在此雙曲線上。令點 O 爲座標平面上的原點, 且令直角雙曲線上的一點 P 之座標爲 (x,y), 其中 $x\geq 1$, 則 P 可以被參數 t 來表示, 參數 t 爲曲線三角形 OVP 面積的雙倍。由點 P 作 x 軸之垂線, 令垂足爲點 M。定義 $\cosh t=OM=x$, $\sinh t=PM=y$, 這兩個就是基本的雙曲函數。其他的函數也可以加以定義, 例如 $\tanh t=\dfrac{\sinh t}{\cosh t}$。

從直角雙曲線的方程可得到

$$\cosh^2 t-\sinh^2 t=1. \tag{1}$$



2. 和角公式

稍後我們將證明 $t=\ln(x+y)$, 其中 ln 是高等數學中的自然對數函數。在此處我們只需知道對於 $A>0$ 且 $B>0$ 時, $\ln A+\ln=\ln AB$ 及若 $\ln A=\ln B$, 則 $A=B$。

現在我們來推導雙曲函數的和角公式, 即

$$\cosh(t_1+t_2)=\cosh t_1\cosh t_2+\sinh t_1\sinh t_2; \tag{2}$$

$$\sinh(t_1+t_2)=\sinh t_1\cosh t_2+\cosh t_1\sinh t_2. \tag{3}$$

令點 P_1、P_2 的參數分別爲 t_1、t_2, 令點 P_3 的參數爲 $t_3=t_1+t_2$, 則上述公式即爲 $x_3=x_1x_2+y_1y_2$, $y_3=x_1y_2+y_1x_2$。如果我們證明了 $t=\ln(x+y)$, 再利用 $t_3=t_1+t_2$, 就可得到

$$\ln(x_3+y_3)=\ln(x_1+y_1)+\ln(x_2+y_2)=\ln(x_1+y_1)(x_2+y_2),$$

即推出

$$x_3+y_3=x_1x_2+y_1y_2+x_1y_2+y_1x_2. \tag{A}$$

我們將由 (A) 式分別推得 (2) 及 (3) 式。首先我們把此方程重寫爲:

$$x_3-x_1\sqrt{x_2^2-1}-x_2\sqrt{x_1^2-1}=x_1x_2+\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}-\sqrt{x_3^2-1},$$

將等式兩邊平方再化簡後可得:

$$x_1x_3\sqrt{x_2^2-1}+x_2x_3\sqrt{x_1^2-1}=x_1x_2\sqrt{x_3^2-1}+\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)(x_3^2-1)},$$

重複上述過程, 可得:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-1-2x_1^2x_2^2=2x_1x_2\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}. \tag{B}$$

將上式重寫爲:

$$\begin{aligned}x_3^2&=x_1^2x_2^2+2x_1x_2\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}+x_1^2x_2^2-x_1^2-x_2^2+1\\&=(x_1x_2)^2+2x_1x_2\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}+\left(\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}\right)^2.\end{aligned}$$

兩邊分別取平方根即可得 (2) 式。另外可以將 (B) 重寫爲

$$\begin{aligned}x_3^2-1&=x_1^2x_2^2-x_1^2+2x_1x_2\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}+x_1^2x_2^2-x_2^2\\&=\left(x_1\sqrt{x_2^2-1}\right)^2+2x_1\sqrt{x_1^2-1}\;x_2\sqrt{x_2^2-1}+\left(x_2\sqrt{x_1^2-1}\right)^2.\end{aligned}$$

兩邊分別取平方根即可得 (3) 式。

3. 面積公式

現在我們來證明第一節中所提及的曲線三角形 OVP 的面積爲 $\dfrac{1}{2}\ln(x+y)$。

利用初等微積分, 曲線三角形 MVP 的面積爲 $I=\displaystyle\int_1^x \sqrt{w^2-1}dw$。將 w 用 $\sec\theta$ 替換, 並將 $\sec^{-1}x$ 記爲 r, 則上述積分式變成

$$\begin{aligned}I&=\int_0^r \sqrt{\sec^2\theta-1}\tan\theta\sec\theta d\theta\\&=\int_0^r \tan^2\theta\sec\theta d\theta.\end{aligned}$$

利用部分積分, 令 $u=\tan\theta$, $dv=\tan\theta\sec\theta d\theta$, 則 $du=\sec^2\theta d\theta$ 且 $v=\sec\theta$。所以

$$\begin{aligned}I&=\tan\theta\sec\theta\Big|_0^r-\int_0^r\sec^3\theta d\theta\\&=xy-\int_0^r(\tan^2\theta+1)\sec\theta d\theta\\&=xy-I-\int_0^r\sec\theta d\theta\\&=xy-I-\ln(\sec\theta+\tan\theta)\Big|_0^r\\&=xy-\ln(x+y)-I.\end{aligned}$$

由上式得到 $I=\dfrac{1}{2}(xy-\ln(x+y))$。因爲三角形 OMP 的面積爲 $\dfrac{1}{2}xy$, 我們即證明出所宣稱的曲線三角形 OVP 的面積爲 $\dfrac{1}{2}\ln(x+y)$, 而 $t=\ln(\cosh t+\sinh t)$。

令點 P 之座標爲 (x,y), 此處仍要求 $x>0$, 但允許 $y<0$, 則曲線三角形 OVP之面積可能爲負值。將它記爲 $-t$, 其中 $t>0$。因爲對稱關係, 我們可得 $\cosh(-t)=\cosh t$ 及 $\sinh(-t)=-\sinh t$, 所以 $-t=\ln(\cosh t-\sinh t)$。將此式與 $t=\ln(\cosh t+\sinh t)$ 合併, 可得

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2};\tag{4}$$

$$\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.\tag{5}$$

其中 e 爲自然對數的底。方程式 (1) 至 (5) 是基本的雙曲函數中最重要的幾個公式。

—本文作者任教University of Alberta, Canada—