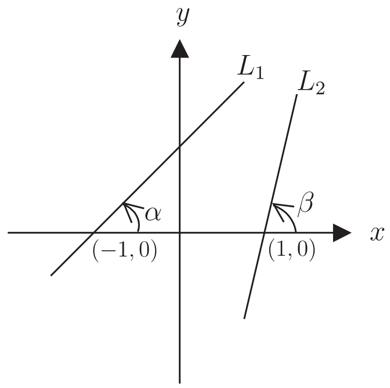
數學傳播 32卷3期, pp. 69-71

等速反向不共中心旋轉的兩直線所交的軌跡
—— 等軸雙曲線或直線

陳國唐

考慮兩條不共旋轉中心, 且以等角速率反向旋轉的兩條直線 L_1 、L_2。若以 L_1 之旋轉中心為 $(-1,0)$, L_2 旋轉中心為 $(1,0)$, 並設時間為 0 時, L_1 、L_2 與 x 軸正向所夾之有向角分別為 α 、β, 如右圖所示, 再設 L_2 經時間 t 後所轉的角為 $\varphi(t)$, 則 L_1 經時間 t 後所轉的角為 $-\varphi(t)$, 因此, L_1 、L_2 在時間 t 時的交點為



$$\begin{cases} L_1 : y = \tan[\alpha-\varphi(t)]\cdot(x+1) \\ L_2 : y = \tan[\beta+\varphi(t)]\cdot(x-1), \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} x &= \frac{\tan[\beta+\varphi(t)]+\tan[\alpha-\varphi(t)]}{\tan[\beta+\varphi(t)]-\tan[\alpha-\varphi(t)]} \\ &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin[2\varphi(t)+\beta-\alpha]} \\ &= \sin(\alpha+\beta)\cdot\csc[2\varphi(t)+\beta-\alpha], \qquad (1) \\ y &= \frac{2\cdot\tan[\beta+\varphi(t)]\cdot\tan[\alpha-\varphi(t)]}{\tan[\beta+\varphi(t)]-\tan[\alpha-\varphi(t)]} \\ &= \frac{\cos[2\varphi(t)+\beta-\alpha]-\cos(\alpha+\beta)}{\sin[2\varphi(t)+\beta-\alpha]} \\ &= \cot[2\varphi(t)+\beta-\alpha]-\cos(\alpha+\beta)\cdot\csc[2\varphi(t)+\beta-\alpha]. \qquad (2) \end{aligned}$$

當 $\alpha+\beta$ 爲 $k\pi$ (k 爲整數) 時, (1) 式化爲 $x=0$, 而 (2) 式化爲

$$y=\cot[2\varphi(t)+\beta-\alpha]\pm\csc[2\varphi(t)+\beta-\alpha],$$

其值爲所有實數。因此在 $\alpha+\beta$ 爲 $k\pi$ (k 爲整數) 時, L_1 、L_2 之交點軌跡即爲 y 軸。

其次, 若 $\alpha+\beta$ 不爲 $k\pi$ (k 爲整數), 則由 (1)$\times\cos(\alpha+\beta)$+(2)$\times\sin(\alpha+\beta)$ 可得

$$\cos(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha+\beta)y=\sin(\alpha+\beta)\cdot\cot[2\varphi(t)+\beta-\alpha], \tag{3}$$

將 (1) 式 、(3) 式分別化爲

$$\csc(\alpha+\beta)x=\csc[2\varphi(t)+\beta-\alpha], \qquad \cot(\alpha+\beta)x+y=\cot[2\varphi(t)+\beta-\alpha],$$

即可得

$$\csc^2(\alpha+\beta)x^2-[\cot(\alpha+\beta)x+y]^2=1, \tag{4}$$

化簡得

$$x^2-2\cot(\alpha+\beta)xy-y^2=1.$$

因此, 只要 $\alpha+\beta$ 不爲 $k\pi$ (k 爲整數), 由二次曲線的分類法則可知上述二次方程式在坐標平面上的圖形爲一雙曲線。意即 L_1 、L_2 之交點軌跡爲一雙曲線。

進一步地, 由(4) 式可得此雙曲線的兩漸近線爲

$$\csc(\alpha+\beta)x\pm[\cot(\alpha+\beta)x+y]=0,$$

化簡得

$$y=\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cdot x \quad 、\quad y=-\cot\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cdot x,$$

故可知此雙曲線的中心爲 $(0,0)$, 即 L_1 、L_2 之旋轉中心的中點。又因爲

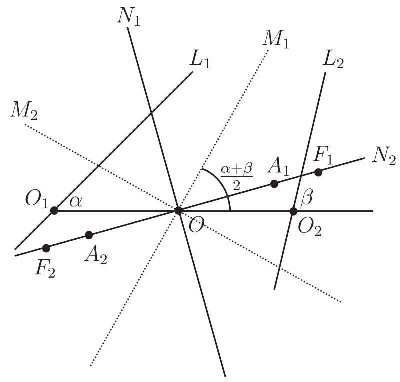
$$-\cot\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cdot\tan\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]=-1,$$

因此, 兩漸近線互相垂直, 意即 L_1 、L_2 之交點軌跡爲一等軸雙曲線。又 $(1,0)$ 、$(-1,0)$ 滿足 (4) 式, 這表示 L_1 、L_2 之旋轉中心落在此等軸雙曲線上。

根據上述討論, 若給定直線 L_1 、L_2 的初始位置, 及 L_1 、L_2 的旋轉中心 O_1 、O_2, 則以尺規可作出 L_1 、L_2 之交點軌跡之漸近線、貫軸、共軛軸、頂點、焦點, 作法如下:

1. 作射線 O_1O_2 並選取其截 L_1、L_2 所得的一組同位角 α 、β;
2. 過 O_1、O_2 之中點 O 作一直線 M_1, 使射線 O_1O_2 截其所得 α 之同位角爲 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, 再作直線 M_2 垂直 M_1 於 O, 則 M_1、M_2 爲所求之漸近線;

3. 過 O 作直線 N_1、N_2 使其爲 M_1、M_2 交角之分角線, 其中 N_2 與 O_1、O_2 位於 M_1、M_2 所交出的同一組對頂角範圍內, 則 N_1 爲所求之共軛軸, N_2 爲所求之貫軸;
4. 在 N_2上, O 的兩側作點 A_1、A_2, 使 $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=\sqrt{d(O_2,M_1)\times d(O_2,M_2)}$, 其中 $d(O_2,M_1)$ 、$d(O_2,M_2)$ 分別代表點 O_2 到直線 M_1 的距離、點 O_2 到直線 M_2 的距離, 則 A_1 、A_2 爲所求之頂點;
5. 在 N_2上, O 的兩側作點 F_1 、F_2, 使 $\overline{OF_1}=\overline{OF_2}=\sqrt{2OA_1}$, 則 F_1 、F_2 爲所求之焦點.



—本文作者原任教台北縣立清水高中, 現任教於國立政大附中—