數學傳播 32卷3期, pp. 55-68

尋尋冪冪 ......
——非負矩陣冪序列初探

柳柏濂

數與形的聯繫和轉化, 是數學永恆的主題。自從電子計算機誕生以來, 資料的處理、運算成了電腦的拿手好戲, 而為了把形的研究放到電腦中進行, 數學家的看家本領是實現形和數的一一對應。把空間中形的定性關係轉化為數之間的定量關係, 把曲線、曲面, 轉化成方程, 從而實現空間 (包括平面) 圖形的電腦處理。而對於只考慮點與線連接的拓樸圖形, 則借助於矩陣把它對應成數表。

現在, 讓我們看看它是如何「變臉」的。

一. 把圖存到電腦中

一個網路可以看作是一個有向圖。它的邊是按箭頭方向連通的, 稱為弧。以圖1的一個網路 $D1$ (有向圖) 為例, 點 i 到點 j 的弧記為 $\overrightarrow{ij}$, 它稱為 i 的出弧或 j 的入弧, 每個點的出弧 (入弧) 數稱為該點的出度 (入度)。

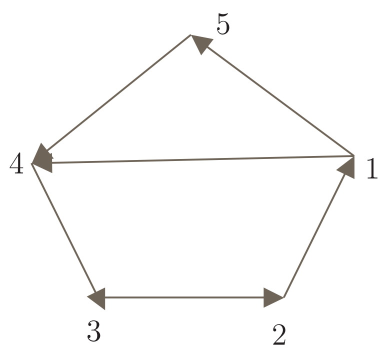


圖1: 有向圖 D_1。

要把這個圖「數位化」, 我們把它「變臉」成一個矩陣, n 階圖 (n 個頂點) 對應於一個 $n\times n$ 方陣 (或稱 n 階方陣)。第 i 個點對應於方陣中的第 i 列 (row), 第 i 行 (column), 而

點 i 到點 j 有弧, 對應於矩陣中第 i 列第 j 行的位置有1, 否則, 在矩陣中第 i 列第 j 行中位置爲0, 於是 D_1, 就成下面的一個5階方陣 (或記作 $A(D_1)$)。

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} {\scriptstyle (1)} & {\scriptstyle (2)} & {\scriptstyle (3)} & {\scriptstyle (4)} & {\scriptstyle (5)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

顯然, 這種對應是一一的, 於是, 圖 D_1, 可以通過數(矩陣 A_1) 存儲到電腦中, 或者參與 $(0,1)$ 矩陣規定的各種運算和交換, 從而導出 D_1 的各種性質。A_1 稱爲 D_1 的鄰接矩陣(adjacency matrix), 而 D_1 稱爲 A_1 的伴隨有向圖 (associated digragh) 也可記作 $D(A_1)$。

如果我們把 D_1 中各弧的方向去掉, 可以變成圖2左邊的無向圖 D_2; 進而把 D_2 的每一邊劃成來回的兩條弧, 則我們可把 D_2 看作是有向圖 D_2'。

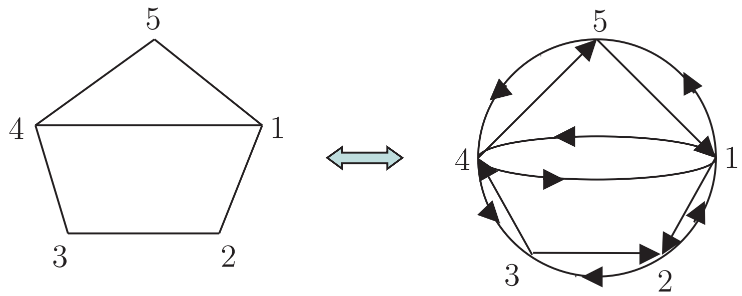


圖2. 無向圖 D_2 及其對應的有向圖 D_2'。

於是 D_2 的鄰接矩陣

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A_2 體現出來的特徵是: 所有的 0, 1以主對角線 (位置 $(1,1)(2,2)\cdots(5,5)$) 爲對稱。這樣的 A_2 矩陣稱爲對稱陣(symmetric matrix), 如果把 A 的轉置矩陣記作 A^T, 若 $A=A^T$, A 稱爲對稱陣。

D_3 是 D_1 中把頂點1和3的標號互換的結果。這反映到鄰接矩陣上,

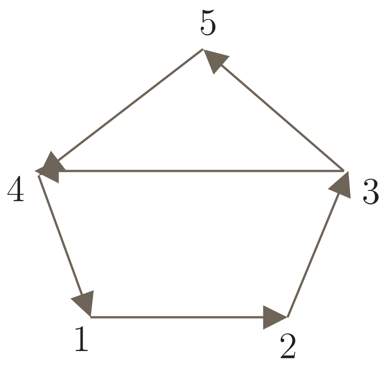


圖3: D_3。

把 A_1 中的第一列(row) 與第3列, 第一行 (column) 與第3行互換, 就能得到 D_3 的鄰接矩陣 A_3。這一變換, 在矩陣論中, 即把 A_1 左乘一個置換矩陣 P_1 (第一列與第3列互換) 和右乘一個置換矩陣 P_1^T。

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所謂置換矩陣, 就是每行每列恰有一個1的 $(0,1)$ 方陣。一個最簡單的置換矩陣, 就是僅僅主對角線爲1的 n 階方陣, 簡稱爲恒等陣, 記作 I_n 。易見, P_1 只不過把 I_5 中 $(1,1)$ 位置的1移到 $(1,3)$ 位置上, $(3,3)$ 位置的1移到 $(3,1)$ 位置上。P_1A_1 就實現了把 A_1 的第1列與第3列對調。於是, $A_3 = A(D_3) = P_1A_1P_1^T$, 我們稱 A_1 與 A_3 是置換相似。若 A 與 B 置換相似, 則它們的伴隨有向圖是同構的, 簡言之, 若把它們的頂點標號抹去, 兩個圖沒有什麼不同。

從上所述, 置換矩陣就是《線性代數》中置換的矩陣刻畫。$1, 2, \ldots, n$ 的排列數, 就是不同 n 階置換陣的個數, 即 $n!$ 個。翻開高等代數或線性代數教材, 有一條用代數方法不容易證明的定理: 任何一個置換均可分解爲互相獨立的輪換的乘積。用上述 $(0,1)$ 矩陣的圖論描述可以簡明地如下證出來。

證明: 任一個置換對應於一個置換陣 A, A 的每行每列恰有一個1, 即它的伴隨有向圖每一點的出度爲1, 入度也爲1。即 $D(A)$ 必是由若干個有向圈組成的圖。每個有向圈對應於一個獨立的輪換。定理得證。

二.「前度劉郎今又來」

0和1是最簡單的整數, 如果我們不從數量的大小去比較它, 而賦於它「無」與「有」的意義。則 $(0,1)$ 矩陣可以定性地刻劃圖的組合性質。以兩個頂點的所謂可達性爲例。設有向圖 $D=(V,X)$, 其中 V 是頂點集, X 是弧集。一個有向圖的一條 (有向) 途徑 (walk) 是頂點與弧的一個交替序列, v_0, x_1, v_1, $\ldots$, x_k, v_k, 其中 $v_i\in V$, $x_i\in X$, $i=1,2\cdots k$, 且 $x_i=\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$, 這樣一條途徑的長是 k, 即其中出現弧的數目爲 k 。一條閉途徑的起點和終點是同一個點。所有點不同的途徑稱爲路 (path), 僅起點終點相同的路稱爲圈。若有一條路從頂點 u 到頂點 v, 則 v 稱爲是從 u 可達的。若一個圖的任何兩個頂點都可達, 則這個圖稱爲強連通圖。

如果我們用1和0分別表示 u 到 v 的可達與不可達, 而加法「+」表示「並」的意義, 容易理解 $0+0=0$, $1+0=0+1=1$, $1+1=1$, 它們可解析爲: 若沒有從 u 到 v 的任何路, 則從 u 不可達 v, 若有路從 u 到 v, 不管是一條路還是兩條路, 都從 u 可達 v。把此加法運算定義列成表。

+	0	1
0	0	1
1	1	1

僅僅 $1+1=1$ 與我們通常的運算不同。若0, 1的乘法保持我們慣用的法則, 則這樣的 $(0,1)$ 矩陣稱爲布爾矩陣 (Boolean matrix), 上述運算稱爲布爾運算。

(試設想, 如果我們把1和0分別表示數的奇, 偶性, 那麼上述加法表中, 應該改動爲 $1+1=0$。又, 如果我們把上述加法表中改爲 $1+1=2$, 則加法可解析爲「從 u 到達 v 的路的條數」, 而不僅僅是可達性。)

現在, 我們考察布爾矩陣的冪。

試看 A_1

$$A_1^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix},\qquad A_1^3=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

按照上述布爾矩陣的組合意義, A_1^2 正說明網路 D_1 中, 每一個點 i 到另一個點 j, 是否有長爲2的途徑。例如, A_1^2 表明從點1到點3、點4都有長爲2的途徑, 而到其他點沒有此類途徑

(見圖1)。類似, A_1^3 表明 D_1 中從點3可以用長爲3的途徑到達點4和點5, 但卻不能到達點1, 2, 3。當然, 從圖 D_1 中, 我們亦不難得出結論, 但在一個密如蛛網的道路系統中, 用布爾矩陣的冪運算遠比直觀搜索容易和準確得多。

一般地, 我們有下列結論。

性質1: 設 n 階布爾矩陣 $A=(a_{ij})$, 記 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$。則 $a_{ij}^{(k)}=1$ 當且僅當 $D(A)$ 中存在一條從點 i 到點 j 的長爲 k 的途徑。

證明: 由矩陣乘法法則,

$$a_{ij}^{(k)}=\sum_{1\le i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}\le n} a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{i_{k-1}}j} \tag{1}$$

因 A 是布爾矩陣, 故 $a_{ij}^{(k)}=1$ 當且僅當式 (1) 右邊的和式中至少有一項不等於零, 當且僅當存在 $1\le i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}\le n$ 使得 $a_{ii_1}\neq 0$, $a_{i_1i_2}\neq 0$, $\ldots a_{i_{k-1}j}\neq 0$。由伴隨有向圖的定義, 這一結論成立當且僅當 $D(A)$ 中存在一條從點 i 到點 j 的長爲 k 的途徑。證畢。

在談到 A 的冪時, 事實上, 我們涉及到布爾矩陣 A 的乘法。容易知道, n 階布爾矩陣一共有 2^{n^2} 個。因此, 它組成一個有限集 B_n。對於矩陣的乘法「$\bullet$」, 它是封閉的, 有恆等元 I_n, 且滿足結合律。因此 $(B_n,\bullet)$ 就構成了一個有限半群。

對於 A 的冪, 理論上, 我們可以從 I 開始不斷地, 乘 A, 就得到 I, A, A^2, A^3,...... 形成一個冪序列。但由於 $(B_n,\bullet)$ 的有限性, 卻使這個冪序列不能含無限多個不同的矩陣, 無窮序列中的有限個元素, 便產生了如下的一種必然出現的迴圈模式 ($\to$ 表示乘 A)。

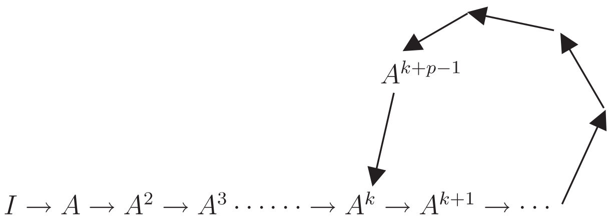


圖4.

於是, 必出現 $A^{k+p}=A^k$, k 是非負整數, p 是正整數, 即序列 $\{A^j\}$, $j=0,1,2,\ldots\ldots$ 從第 $k+1$ 項 A^k 起, 作週期性變化,「前度劉郎今又來」, 準確地說 $\{I,A,\ldots\ldots A^{k+p-1}\}$ 對乘法成一個 $k+p$ 階半群。

我們稱 $p=p(A)$ 爲 A 的冪振動週期, 簡稱週期 (period)。$k=k(A)$ 是 A 的收斂指數, 簡稱指數 (index)。用數學語言來說, $k(A)$ 是使 $A^k=A^{k+1}t$ 是某個正整數, 成立的最小非負整數, 而 $p(A)$ 是使 $A^k=A^{k+p}$ 成立的最小整數。

於是冪序列 $\{A^j\}$ 的變化狀態被 $p(A)$ 和 $k(A)$ 所決定。

特別地, 存在正整數 k, 使 $A^k=J$ 的矩陣 A 稱爲本原矩陣, 而使 $A^k=J$ 成立的最小正整數 k, 稱爲 A 的本原指數 (exponent)。顯然, 本原矩陣 A 有 $A^k=A^{k+1}=A^{k+2}=\cdots\cdots=J$, 因此, 它的週期 $p(A)=1$。

如果 A 是本原陣, 由上述論述可知, 它的伴隨有向圖 $D(A)$ 具有一個有趣的性質: 存在一個正整數 k, 使 $D(A)$ 中的每一點到圖中的每一個頂點 (包括自身) 都有長爲 m 的途徑, 這裏 m 是不小於 k 的任一個整數。

我們把所有 n 階本原矩陣的集合記爲 P_n 。顯見, $P_n\subset B_n$ 。不要以爲 P_n 只是 B_n 中的一類非常特殊的矩陣, Moon 和 Moser (1966[2]) 曾證明如下的結果:

記 $|M|$ 是集合 M 的基數 (即有限集的元數), 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|P_n|}{|B_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|P_n|}{2^{n^2}}=1.$$

這就是說: 幾乎所有 n 階 $(0,1)$ 矩陣都是本原陣。在 [2] 中, 還得出了更令人吃驚的結論: 幾乎所有 n 階 $(0,1)$ 矩陣 A 是本原的且 $A^2=J$。

三. 與狼共舞

讓我們用布爾矩陣解決一個「與狼共舞」的問題。

兩名獵人帶著兩隻惡狼過河, 現只有一隻小船, 每次最多能乘兩個人, 或兩隻狼, 或一人一狼, 爲避免惡狼傷人, 人和狼同時在場時, 人數不能少於狼數, 船過河一次要花10分鐘, 問最短幾分鐘能使獵人和狼都能過河?

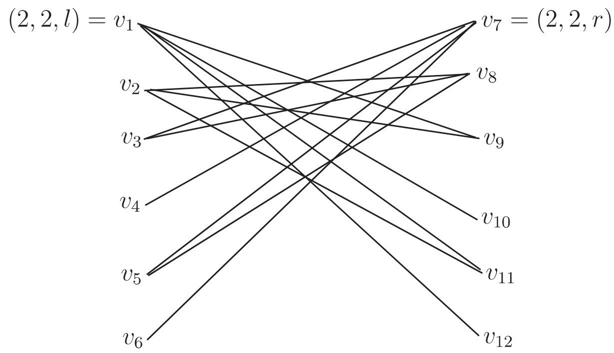
這是一個常見的智力問題, 靠靈機一動或靈機幾動, 當然可以把答案湊出來, 但是, 要程式化地, 把解做出來, 還得靠數學。正如著名數學家和數學教育家波利亞 (G. Polya) 所說的「能用一次的想法只不過是一個竅門, 能用一次以上的想法就成爲一種方法了」。

我們用布爾矩陣的方法探索這個問題。

不妨設渡河從左岸到右岸。用 (m,n,l) 表示左岸有 m 個人, n 只狼, 用 (m,n,r) 表示右岸有 m 個人, n 只狼。於是, 從左岸到右岸全部可能的狀態爲:

$$\begin{array}{ll}
v_1=(2,2,l) & v_7=(2,2,r)\\
v_2=(2,1,l) & v_8=(2,1,r)\\
v_3=(1,1,l) & v_9=(1,1,r)\\
v_4=(2,0,l) & v_{10}=(2,0,r)\\
v_5=(0,2,l) & v_{11}=(0,2,r)\\
v_6=(0,1,l) & v_{12}=(0,1,r)
\end{array}$$

我們把上述12個點畫成一個圖。若從一個點的狀態可以轉移成另一個點的狀態, 則兩個點之間連一條邊。於是, 我們便可得到一個圖 G (圖5)。



G 圖5.

渡河, 便是從圖中尋找一條從 v_1 到達 v_7 的途徑, 而最短的途徑便是花最小時間的渡河方案。

我們把眼花繚亂的圖, 轉化爲易於處理和識別的數位, 即借助於布爾矩陣。

圖 G 的鄰接矩陣爲

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_1 & 0 \end{bmatrix}_{12\times 12}$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我們只須找出使 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$ 中 $a_{17}^{(k)}=1$ 的最小的正整數 k。

由簡單的計算, 得

$$A^k=\begin{cases} \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_1^k \end{bmatrix}, & k\text{爲偶數}, \\ \begin{bmatrix} 0 & A_1^k \\ A_1^k & 0 \end{bmatrix}, & k\text{爲奇數}. \end{cases}$$

經計算可得 $a_{17}^{(1)}=a_{17}^{(2)}=a_{17}^{(3)}=a_{17}^{(4)}=0$, 但 $a_{17}^{(5)}=1$, 故小船至少5次過河才能安全地把兩個獵人和兩隻狼從左岸運到右岸, 這場「與狼共舞」的歷程至少需要50分鐘。

如果我們把布爾運算改爲普通運算, 即 $1+1=2$, 所用的矩陣稱爲 $(0,1)$ 矩陣。按上述方法, 可得 $a_{17}^{(1)}=a_{17}^{(2)}=a_{17}^{(3)}=a_{17}^{(4)}=0$, 但 $a_{17}^{(5)}=4$, 這說明有4種不同的安全而最快的過河方案。讀者從圖5中, 可找出4條不同的從 v_1 到達 v_7 的長爲5的途徑來。按照這途徑便明確指示出渡河的方法。

事實上, 我們所用的布爾矩陣模型, 同樣適用於描述非負矩陣 (即矩陣的每個元是非負數) 的組合性質, 把正數看作是1, 則兩個非負矩陣相乘時, 正數 $\times$ 正數=正數, 正數 $+$ 正數=正數, 正是 $1\times 1=1$, $1+1=1$ 的定性描述。相應地, 我們也可以把一個本原的非負矩陣 A 描述成存在某一個 k, 使 $A^k>0$ 的矩陣。如果我們把 n 階布爾陣 A 看作是 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ 上的映射, 則圖4可看作是由 A 經迭代而生成的離散拓樸半動力系統, 而在符號動力系統中, 非負方陣作爲轉移方陣可描述有限子轉移的動力性狀。特別地, 2階有限型子轉移就是拓撲馬爾可夫鏈, 在馬爾可夫鏈的研究中, 布爾陣的本原性正是轉移矩陣遍歷性質的反映。

四. 老調新曲

在數學史上, 著名的「兎子繁殖」問題產生了衆所周知的菲波那契 (Fibonacci) 數列, 其遞迴關係爲

$$f_{k+2}=f_{k+1}+f_k,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

$$f_0=0,\quad f_1=1 \tag{2}$$

易知, 用組合方法或特徵方程方法可解得 f_k 的運算式。

不怕老調重彈, 我們用 $(0,1)$ 矩陣的冪, 試譜一闋求解遞迴關係的新曲。

我們用矩陣描述遞迴關係 (1), 由 (1) 得

$$\begin{cases} f_{k+2}=f_{k+1}+f_k \\ f_{k+1}=\qquad f_{k+1} \end{cases}\quad k=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

設 $\alpha=\begin{pmatrix} f_{k+1}\\ f_x\end{pmatrix}$, $\qquad \alpha_0=\begin{pmatrix} f_1\\ f_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1\,1\\1\,0\end{pmatrix}$$

由 (2) 和 (3) 得

$$\alpha_{k+1}=A\alpha_k,\quad k=0,1,2$$

即

$$\alpha_k=A^k\alpha_0,\quad k=1,2,\ldots \tag{4}$$

於是, 求得 A^k, 便可由上式得到 α_k, 從而得 f_k。

如何求 $(0,1)$ 矩陣的 k 次冪 A^k。除了用並不容易的直接計算外, 我們運用一點線性代數的技巧: 若 A 可對角化, 即存在可逆矩陣 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 Λ 爲對角陣, 就得

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1} \tag{5}$$

而求對角陣 A 的冪是輕而易舉的。

由線性代數可知

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 λ_1, λ_2 便是 A 的特徵值。即

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda-1=0$ 的解, 於是得

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{6}$$

相應 λ_1, λ_2 的特徵向量分別是 $x_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 取 $P=(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 則 $P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

由式 (5) 有

$$A^k = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1} & \lambda_1\lambda_2^{k+1}-\lambda_2\lambda_1^{k+1} \\ \lambda_1^k-\lambda_2^k & \lambda_1\lambda_2^k-\lambda_2\lambda_1^k \end{pmatrix}$$

由 (4) 得

$$\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = \alpha_k = A^k\alpha_0 = A^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1} \\ \lambda_1^k-\lambda_2^k \end{pmatrix}$$

把結果 (6) 代入上式, 便得

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^k - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^k\right).$$

在拙作《從樓梯模型談起》(見數學傳播, 第二十五卷, 第一期), 我們曾用一個組合模型, 得出了帶係數齊次差分方程的一般解, 現在, 我們用矩陣冪的方法, 更簡明地處理這一問題。

我們仍沿用文 [4]中的符號, 考慮常係數齊次差分方程

$$f(n) = \alpha_1 f(n-1) + \alpha_2 f(n-2) + \cdots + \alpha_p f(n-p) \tag{7}$$

$f(0)=c_0,\ f(1)=c_1,\ \ldots,\ f(p-1)=c_{p-1},$

$\alpha_i(i=1,2,\ldots,p)$ 及 $c_i(i=0,1,\ldots,p-1)$ 均是常數

衆所周知, 要解上述方程, 須解一個特徵方程

$$\lambda^p-\alpha_1\lambda^{p-1}-\alpha_2\lambda^{p-2}-\cdots-\alpha_p=0 \tag{8}$$

當 $p\geq 3$ 時, 它的解並不能手到擒來。

我們的思路是: 構造一個矩陣 A, 使 (8) 是 A 的特徵方程, 從而, 用冪 A^m 導出(7) 的一般解。

構作 p 階方陣 A

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1\\ \alpha_p & \alpha_{p-1} & \alpha_p & \cdots & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

則 A 的特徵方程便是 (8)。由線性代數的 Hamilton-Cayley 定理

$$A^p-\alpha_1A^{p-1}-\alpha_2A^{p-2}-\cdots-\alpha_pI=0 \tag{9}$$

考慮 $p\times 1$ 矩陣 (向量)

$$C=(c_0,c_1,\ldots,c_{p-1})^T$$

記 $A^mC=(a^{(m)},\ldots\ldots)^T$, 則(7) 的解 $f(n)=a^{(n)}$, 要確認這一點, 我們只須證明 $f(n)=a^{(n)}$ 滿足差分方程 (7)。

由方程 (9)

$$A^nC=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iA^{n-i}C$$

因而 $(a^{(n)},\ldots)^T=A^nC=\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_iA^{n-i}C$。

儘管式子似乎很複雜, 但我們僅著眼於第1列 (row)。因

$$A^i=\begin{pmatrix} & (i+1) & \\ 0\cdots o & 1 & 0\cdots 0\\ & & \\ & & \end{pmatrix}_{p\times p},\ i=0,1,2,\ldots,p-1$$

故 $(a^{(n)},\ldots\ldots)^T=\alpha_1(a^{(n-1)},\ldots)^T+\alpha_2(a^{(n-2)},\ldots)^T+\ldots\alpha_p(a^{(n-p)},\ldots)^T$。

於是 $a^{(n)}=\alpha_1a^{(n-1)}+\alpha_2a^{(n-2)}+\cdots+\alpha_pa^{(n-p)}$, 因此 $a^{(n)}$ 滿足 (7) 的遞迴關係。又

$$(a^{(n)},\ldots\ldots)^T=A^iC=(C_i,\ldots)^T,\ i=0,1,\ldots p-1$$

即 $a^{(i)}=c_i$, $i=0,1,\ldots p-1$, $a^{(n)}$ 滿足 (7) 的初值條件。故 (7) 的解 $f(n)=a^{(n)}$。

剩下的工作是求 $a^{(n)}$, 即求 $A^{(n)}C$(一個 $p\times 1$ 矩陣) 的第一行。若設 $A^m=(a_{ij}^{(m)})$, 則

$$a^{(n)}=c_0a_{11}^{(n)}+c_1a_{12}^{(n)}+\cdots+c_{p-1}a_{1p}{}^{(n)},\tag{10}$$

(10) 中的 $a_{1j}{}^{(n)}$ 就是 A 所表示的帶權有向圖中, 從1到 j 的長爲 n 的所有途徑的權之和。由矩陣 A, 容易畫出它對應的伴隨有向圖 D(圖7), 它的弧分別帶權 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_p$ 或1(無標記的弧表示權爲1)。由 D, 不難證明: $a_{1j}{}^{(n)}=a_{jj}^{(n+1-j)}$

故由 (10) 式

$$a^{(n)}=\sum_{j=1}^{p}c_{j-1}a_{1j}^{(n)}=\sum_{j=1}^{p}c_{j-1}a_{1j}^{(n+1-j)}$$

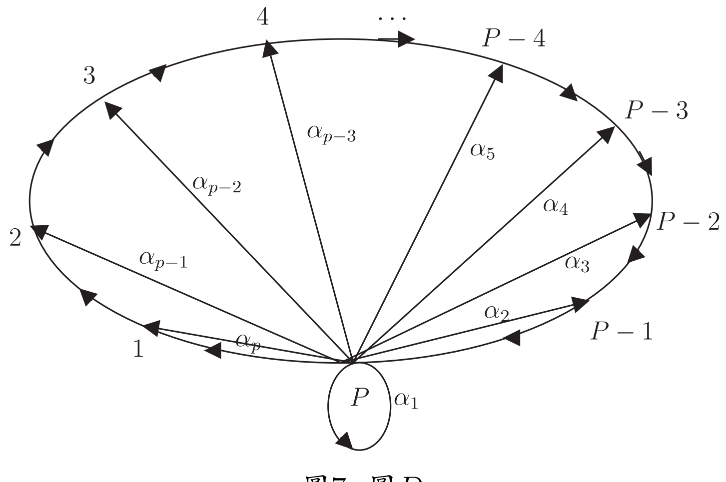


圖7. 圖D。

直接從圖 D, 用組合方法 (參見文 [4]), 可得 $a_{jj}^{(m)}=\sum\limits_{i=1}^{j}\alpha_{p-i+1}F_{m-p+i-1}$, 這裏 $F_m=\sum\limits_{j_1+\ldots pj_p=m}\frac{(j_1+\ldots+j_p)!}{j_1!\ldots j_p!}\alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_p^{j_p}$ (即文 [4] 的引理)。於是我們便得

$$\begin{aligned}f(n)=a^{(n)}&=\sum_{j=1}^{p}c_{j-1}\Big(\sum_{i=1}^{j}\alpha_{p-i+1}F_{n-j-p+i}\Big)\\&=\sum_{j=0}^{p-1}\Big(\sum_{i=j}^{p-1}c_i\alpha_{p-i+j}\Big)F_{n-p-j}\end{aligned}$$

細心的讀者可以發現, 這與文 [4] 中的 (12) 式結論是一致的。

五. 排名須分先後

會議的來賓, 排名可以不分先後, (也可按姓氏筆劃排列), 以示公允。然而, 競技比賽中的金牌之爭, 事關實力、名譽的大事, 萬萬不可敷衍了事。

一場迴圈賽過後, 如何令人口服心服地排出名次, 是對舉辦者的一次挑戰。

我們考察一場由 6 名選手參加的不允許有平局的循環賽 (例如乒乓球賽), 每兩個選手僅賽一場。設參賽選手分別表示爲頂點 1, 2, 3, 4, 5, 6。若選手 i 勝選手 j, 則連一條, 由 i 到 j 箭頭指向 j 的弧, 便得到一個6階共有 $3 \times 5 = 15$條弧的有向圖 (圖8)。這種以循環賽爲背景的 n 階有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 條弧的有向圖稱爲競賽圖, 記爲 T_n, 它是循環賽果的數學描述, T_n 的包含經過每個頂點恰一次的有向路稱爲Hamilton 路。圖論中, 已經證明了 T_n 的很多有趣的性質。例如

(t_1) 每個 T_n都有Hamilton 路。

(t_2) T_n 的鄰接矩陣 A 是本原的, 當且僅當 T_n 是強連通, 且 $n \geq 4$。

(t_3) 若 T_n 本原的, 則 $A(T_n)$ 具有最大絕對值的特徵根是正實數 r, 且

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{A}{r}\right)^i J = S,$$

這裏 S 是 A 對應於 r 的正特徵向量。(見 [6] §8.5)

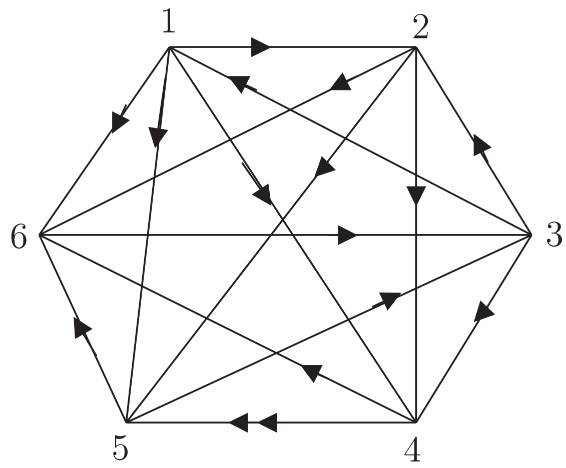


圖8

我們回到圖 8 中 T_6 表示的一場6 人循環賽的競賽結果。在圖中可以反映競賽中每個選手的勝負, 例如: 選手 1 打敗選手 2, 4, 5 和 6, 但卻輸給了選手 3。

要排出各選手的最後名次, 一個直觀而普遍傾向的辦法是找一條有向的 Hamilton 路。(由上述的性質 (t_1), 這樣的路是存在的), 然後, 按參加者在路中的位置排列名次, 例如, 我們找到有向 Hamilton 路 (3, 1, 2, 4, 5, 6)。如果由此, 舉辦者簡單地宣佈選手3是冠軍, 選手1是亞軍 ..., 那就會引進掀然大波。因爲如果某個反駁者站出來 , 從圖中舉出另一條有向 Hamilton 路 (1, 2, 4, 5, 6, 3) 或 (1, 4, 6, 3, 2, 5) 的話, 那麼局面將難以收拾。定性的方法難以奏效, 看來, 我們應求助於定量的方法。

先計算每個選手的得分 (每個點的出度), 並比較它們, 由 T_6, 我們得到一個由選手1, 2, 3, 4, 5, 6的得分構成的「得分向量」

$$S_1 = (4, 3, 3, 2, 2, 1).$$

由於 S_1 中有相同的得分 (例如選手2和3, 例如選手4和5), 我們仍不能排得一個令人服氣的次序, 那麼, 我們再看它們手下敗將的得分之和 (即每個點用長爲2的途徑所到達的點的個數), 得到所謂「二級得分向量」

$$S_2 = (8, 5, 9, 3, 4, 3).$$

由 S_2 觀察: 選手3名列第一, 繼續這個程式, 得到更「高級」的得分向量

$$\begin{aligned} S_3 &= (15, 10, 16, 7, 12, 9), \\ S_4 &= (38, 28, 32, 21, 25, 16), \\ S_5 &= (90, 62, 87, 41, 48, 32), \\ S_6 &= (183, 121, 193, 80, 119, 87), \\ &\cdots\cdots\cdot \end{aligned}$$

設 $A = A(T_6)$, 依賴矩陣的冪, 可得第 i 級的得分向量爲 $S_i = A^i J$。

隨著得分向量的升級, 選手的排列名次有所波動 (可觀察選手1和選手3的得分)。

可是, 令人欣慰的是, 我們可以證明 S_i 中的各選手得分大小總是收斂於一個固定的排列。因爲, 圖8的 T_6 是強連通的, 由性質(t_2), A 是一個本原矩陣, 因此, 它的最大絕對值的特徵值是正實數 r, r 對應的正特徵向量是 S, 由性質 (t_3), 有

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{A}{r}\right)^i J = S.$$

S 便可以反映了當 $i \to \infty$ 時, 各個選手的名次排列, 爲了更清晰地比較, 可以把 S 正規化 (即使各分量之和爲1), 得正規化向量。對於圖8的 A, 可得

$$R = 2.232 \text{ 和 } \bar{S} = (0.238, 0.164, 0.231, 0.113, 0.150, 0.104).$$

於是, 可得這一循環賽各選手的排列次序爲 1, 3, 2, 5, 4, 6。

數學勝於雄辯, 矩陣方法, 應該給出一個大家都能接受的結果。從眉飛色舞地談論數學, 再回到現實中來, 確實, 沒有哪一個賽事求助於如此深入的數學。當然, 主辦方可以賽前訂出排名的依據: 先看 S_1 的排名位, 有同分者再用 S_2 分出高低, 如此繼續, 事實上, 這個規則正是體現了上述「收斂於一個固定排列」的數學思想。

北宋詞人李清照在那首膾炙人口的《聲聲慢》中, 開始於「尋尋覓覓」。我們在這裏, 對矩陣做了一番「尋尋冪冪」, 以期在非負矩陣的冪序列中, 尋出對數學的領悟和樂趣。

參考文獻

1. 柳柏濂, 組合矩陣論, 科學出版社, 2005年, 第二版。
2. J.W. Moon and L. Moser, Almost all(0,1)-matrices are primitive, *Studia Scient Math Hung*, **1**(1966), 153-156.
3. 王樹禾, 圖論及其算法, 中國科學技術大學出版社, 1990年10月。
4. 柳柏濂, 從樓梯模型談起, 數學傳播, 第二十五卷, 第一期, 77-81。
5. B.L. Liu, A method to solve linear recurrences with constant coefficients, *Fibonacci Quarterly*, 2 (1992)1-9.
6. R.A. Horn and C.R. Johson, *Matrix Analysis*, Cambridge Press,1985.
7. J.A . Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, The Macmillan Press LTD, 1976.

—本文作者任教中國廣州華南師範大學數學系—