數學傳播 32卷3期, pp. 51-54

“兩角和與差的三角函數”的一個教學設計

朱 哲

“兩角和與差的三角函數” 這一教學內容, 一般教材是以單位圓中由兩點間的距離公式, 推導出 $C_{(\alpha+\beta)}$; 再由誘導公式推出 $C_{(\alpha-\beta)}$、$S_{(\alpha+\beta)}$、$S_{(\alpha-\beta)}$, 然後根據正切定義推出 $T_{(\alpha+\beta)}$、$T_{(\alpha-\beta)}$; 之後, 從一般到特殊, 導出二倍角的正弦、余弦、正切公式。可以說, 教材如此安排, 邏輯嚴密、推理自然流暢、體系完整, 體現出數學思維的嚴謹性。不過, 在實際教學中, 教師可以通過合理而精心地設計, 引導學生對這些公式進行探究, 進行充滿趣味的數學活動。以下是 “兩角和與差的三角函數” 的一個教學設計。

1. $\sin 2\alpha$ 公式的教學 (教師演示、啓發為主)

出示一長方形紙片 (如圖1) , 對角線 AC 長爲 2, 長 AD 與 AC 夾角爲 α, 則 AD 爲 $2\cos\alpha$, CD 爲 $2\sin\alpha$, 則 $S_{\triangle ACD}=2\sin\alpha\cos\alpha$; 另一方面, $\angle DOE=2\alpha$, $OD=1$, $DE=\sin 2\alpha$, $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot DE=\sin 2\alpha$。所以, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$。

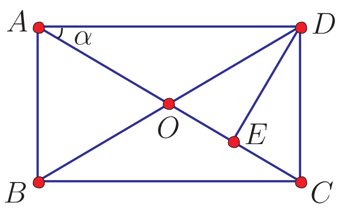

圖1

2. $\cos 2\alpha$ 公式的教學 (由學生自主探索)

問題: 你能利用類似的方法推導 $\cos 2\alpha$ 的公式嗎? 學生自主思考並結合小組討論, 若干時間後, 展示所得成果。

方法1: 在圖 1 中, 由 $AD^2=AE\cdot AC$, 得 $(2\cos\alpha)^2=(1+\cos 2\alpha)\cdot 2$, 得 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$; 由 $CD^2=CE\cdot AC$, 得 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$。由 $DE^2=AE\cdot CE$, 可得

$\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$。利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, 可得 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$。

方法2: 在圖 1 中, $\cos\alpha=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{(1+\cos 2\alpha)}{2\cos\alpha}$, 可得 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$。同樣我們可由 $\sin\alpha=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$, 得 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$。此方法比方法 1 更簡單。

方法3: 如圖 2 所示, 左邊陰影長方形的面積 $S=\cos\alpha\cdot 2\cos\alpha=2\cos^2\alpha$; 右邊陰影平行四邊形底爲 1, 高爲 $1+\cos 2\alpha$, 則面積 $S=1+\cos 2\alpha$ 。圖中長方形與平行四邊形面積相等, 所以 $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$, 即 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 。[1]

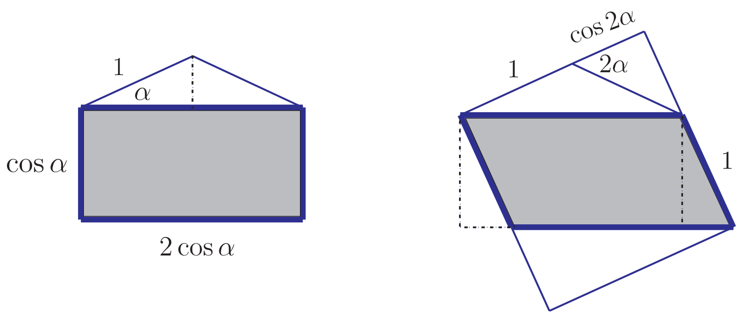

圖2

課後學生可以進一步思考, 還有沒有其他的方法。

3. $\tan 2\alpha$ 公式的教學 (由學生課後自主探索)

由定義及以上公式, 可得 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 。

問題: 你能利用圖形來推導、表示公式 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 嗎?

4. $\sin(\alpha+\beta)$、$\cos(\alpha+\beta)$ 公式的教學 (由學生自主探索)

方法 2 啓發我們對 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的公式進行探索。給學生足夠的時間思考交流, 然後展示他們的成果。

如圖 3 所示, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, 作 $BD\perp AC$ 交 AC 延長線於 D, 則 $\angle BCD=\alpha+\beta$, 作 $CE\perp AB$。令 $BC=1$, 則 $BD=\sin(\alpha+\beta)$, $CD=\cos(\alpha+\beta)$, $BE=\cos\beta$, $CE=\sin\beta$, $AC=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, $AE=\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}$ 。

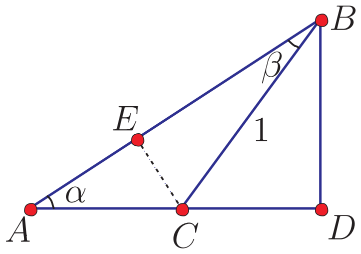

圖3

則 $\sin\alpha=\dfrac{BD}{AB}$, 即 $\sin\alpha(\cos\beta+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha})=\sin(\alpha+\beta)$, 整理得 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

而 $\cos\alpha=\dfrac{AD}{AB}$, 即 $\cos\alpha(\cos\beta+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha})=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\cos(\alpha+\beta)$, 則 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\dfrac{\cos^2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\cos\alpha\cos\beta+\dfrac{(\cos^2\alpha-1)\sin\beta}{\sin\alpha}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

利用誘導公式, 還可以得到 $\sin(\alpha-\beta)$、$\cos(\alpha-\beta)$ 公式。

問題: 你能利用類似的方法推導 $\sin(\alpha-\beta)$、$\cos(\alpha-\beta)$ 這兩個公式嗎?

5. $\tan(\alpha+\beta)$、$\tan(\alpha-\beta)$ 公式的教學 (由學生課後自主探索)

由定義及以上公式, 可得 $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$。

問題: 你能利用圖形來推導、表示這兩個公式嗎?

(註: 例題、練習和小結都略去。以上內容可視具體情況分一至三課時進行。)

這一教學設計的最大特點在於充分利用數形結合, 而一般教材更多地是運用代數運算。本文以三角函數的定義爲基礎, 輔之以直觀圖形, 並利用面積公式和射影定理等, 對公式進行推導。幾種推導方法之間有聯繫也有變化, 正是這些變化給學生留出了自主探索的空間。提出有沒有其他方法等問題則拓廣了學生的思維, 讓學生在課後去做進一步的思考。

筆者在文 [2] 中對教學設計提出如下三個觀點: 要在對教材的深加工上進行“再創造”, 要在數學教學的過程中讓學生進行“再創造”, 要讓學生在“再創造”中學習數學化。本文可以說是對這三個觀點的一個實例說明。一般教材展示了問題及其完整答案, 這樣就掩蓋了前人的思考過程; 如果照本宣科, 就容易把學生的探索淹沒在教師的講解中。所以教師應該根據自己對教學內容的深入理解和對學生認知情況的細緻洞察, 對教材進行深加工, 設計出一個以教材爲藍

本, 但又不拘泥於教材的教學過程。在這個教學中應充分暴露、展現學生的思維和探索過程, 讓學生經歷知識的再創造。讓他們能體會到所學的知識不是教師和教材告訴他們的, 而是自己“發現”的。此外, 學生的探索和發現很可能是盲目的、支離破碎的、非形式化的, 教師則應引導學生建構知識網路, 形成形式化的數學知識, 完成數學化的過程。

對教學設計, 我們還可以從知識的聯繫這一角度進行分析。上述三角函數公式在一般教材中往往是分開來介紹的, 它們之間的聯繫也不是特別緊密; 而在本文中, 它們則是通過數學方法與思維爲聯繫, 經由學生的自主探索, 最終作爲一個知識整體完整地呈現出來。所以說, 教師在處理教學內容時, 應深入挖掘與其他數學知識的關聯, 並在教學中通過適當的方式呈現, 讓學生感到數學是有趣的, 是好玩的, 是美的。當然這種美妙的感受並不能輕而易舉地獲得。如果在教學中, 教師還能適當加入這些公式的歷史, 則可以形成“縱橫交錯”的數學教學, 從而讓學生在比較高的層次欣賞數學。

參考文獻

1. 汪曉勤、韓祥林, 中學數學中的數學史, 北京: 科學出版社, 2002.
2. 朱哲, 教師成長: 以教學案例爲載體的行動研究, 數學數學, 2005(4).

—本文作者任教中國浙江師範大學數理與信息工程學院—