數學傳播 32卷3期, pp. 41-50

三角形外、重、垂心中任兩心何時同落在內切圓上

劉紹正

一、前言

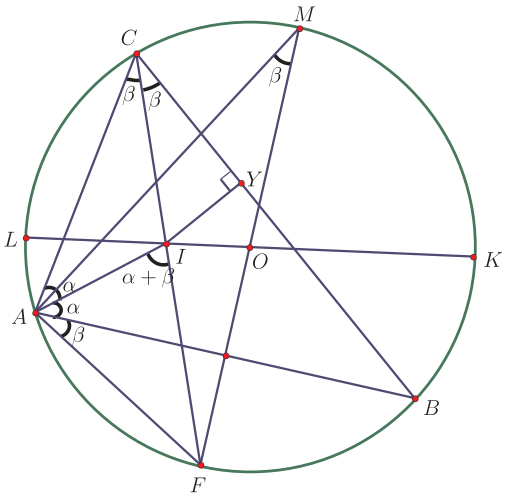
早期的數學奧林匹亞競賽試題中, 曾出現求三角形外心與內心之距離的問題, 因此本文嘗試以三角形之外接圓半徑 R 、內切圓半徑 r 及周長之半 s 來呈現古典幾何中常見的內、外、重、垂心之距離, 並思考這些距離的進一步應用, 而找到外、重、垂心中任兩心同落在內切圓上的條件。

二、符號定義

以下的討論 R 、r 分別表 $\triangle ABC$ 的外接圓、內切圓半徑, s 爲周長之半; 點 I、O、G、H 分別表 $\triangle ABC$ 的內、外、重、垂心。

三、以向量分別求出 $\overline{OI}^2, \overline{OG}^2, \overline{IH}^2, \overline{GI}^2$

1. $|\overrightarrow{OI}|^2 = R^2 - 2Rr \;\cdots\cdots\;$ [參考資料1]



證明: $\angle AIF = \alpha + \beta = \angle FAI$ (如右圖)

$\Longrightarrow \overline{AF} = \overline{IF}$

設 $\overline{OI} = d$

$$
\begin{aligned}
R^2 - d^2 &= (R-d)(R+d)\\
&= \overline{IL}\cdot\overline{KI}\\
&= \overline{IF}\cdot\overline{IC}\\
&= \overline{AF}\cdot\overline{IC}\\
&= \frac{\overline{AF}}{\overline{FM}}\cdot\overline{FM}\cdot\frac{\overline{IC}}{\overline{IY}}\cdot\overline{IY}\\
&= \sin\beta\cdot\overline{FM}\cdot\frac{1}{\sin\beta}\cdot\overline{IY}
\end{aligned}
$$

$$=\overline{FM}\cdot\overline{IY}$$
$$=2R\cdot r$$

$|\overrightarrow{OI}|^2=R^2-2Rr\geq 0\Rightarrow R\geq 2r$ 此爲尤拉不等式。

2. $$|\overrightarrow{OG}|^2=\Big|\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\Big|^2$$
$$=\frac{1}{9}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$$
$$=\frac{1}{9}\Big[3R^2+2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\Big]$$
$$=\frac{1}{9}\Big[3R^2+2R^2(1-2\sin^2 A+1-2\sin^2 B+1-2\sin^2 C)\Big]$$
$$=\frac{1}{9}\Big[9R^2-4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\Big]$$
$$=\frac{1}{9}\Big(9R^2-4R^2\frac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2}\Big)\ \cdots\cdots\ (\text{附錄1})$$
$$=\frac{1}{9}(9R^2-2s^2+8Rr+2r^2)$$

3. $$|\overrightarrow{IH}|^2=|\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OI}|^2=\overline{OH}^2+\overline{OI}^2-2\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OI}$$
$$=9\overline{OG}^2+\overline{OI}^2-2\cdot 3\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OI}$$
$$=(9R^2-2s^2+8Rr+2r^2)+(R^2-2Rr)$$
$$-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\Big(\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}\Big)$$
$$=10R^2+6Rr-2s^2+2r^2-2\ \frac{1}{a+b+c}\ (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$
$$\times(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})$$
$$=10R^2+6Rr-2s^2+2r^2-\frac{1}{s}(6R^2s+2Rrs-r^2s-s^3)\cdots\cdots(\text{附錄2})$$
$$=10R^2+6Rr-2s^2+2r^2-6R^2-2Rr+r^2+s^2$$
$$=4R^2+4Rr+3r^2-s^2$$

4. $$|\overrightarrow{GI}|^2=|\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OG}|^2$$
$$=\overline{OI}^2+\overline{OG}^2-2\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OG}$$
$$=R^2-2Rr+\overline{OG}^2-2\Big(\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}\Big)\cdot\Big[\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\Big]$$
$$=R^2-2Rr+\frac{1}{9}(9R^2-2s^2+8Rr+2r^2)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{3s}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\\
&=2R^2-\frac{10}{9}Rr-\frac{2}{9}s^2+\frac{2}{9}r^2-\frac{1}{3s}(6R^2s+2Rrs-r^2s-s^3)\\
&=2R^2-\frac{10}{9}Rr-\frac{2}{9}s^2+\frac{2}{9}r^2-2R^2-\frac{2}{3}Rr+\frac{1}{3}r^2+\frac{1}{3}s^2\\
&=\frac{1}{9}(s^2-16Rr+5r^2)
\end{aligned}
$$

四、相關的引理

1. **引理一**: 若 $\triangle ABC$ 爲非正三角形, 則

(1) 若 $\triangle ABC$ 三個內角中, 恰有一個內角爲 60 度 $\Leftrightarrow \overline{OI}=\overline{IH}$ $\cdots\cdots$ [參考資料2]

(2) 若 $\triangle ABC$ 三個內角中, 有二個內角大於 60 度 $\Leftrightarrow \overline{OI}>\overline{IH}$。

(3) 若 $\triangle ABC$ 三個內角中, 有二個內角小於 60 度 $\Leftrightarrow \overline{OI}<\overline{IH}$。

證明:

$$
\begin{aligned}
\overline{OI}^2-\overline{IH}^2&=R^2-2Rr-(4R^2+4Rr+3r^2-s^2)=s^2-(3R^2+6Rr+3r^2)\\
&=s^2-3(R+r)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&s-\sqrt{3}(R+r)\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)-\sqrt{3}\Big[R+R(\cos A+\cos B+\cos C-1)\Big]\ \cdots\cdots\ (\text{附錄3})\\
&=R(\sin A+\sin B+\sin C)-\sqrt{3}R(\cos A+\cos B+\cos C)\\
&=R\Big[(\sin A-\sqrt{3}\cos A)+(\sin B-\sqrt{3}\cos B)+(\sin C-\sqrt{3}\cos C)\Big]\\
&=2R\Big[\sin\Big(A-\frac{\pi}{3}\Big)+\sin\Big(B-\frac{\pi}{3}\Big)+\sin\Big(C-\frac{\pi}{3}\Big)\Big]\\
&=2R\Bigg[2\sin\frac{A+B-\frac{2\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+\sin\Big(C-\frac{\pi}{3}\Big)\Bigg]\\
&=2R\Bigg[2\sin\frac{\frac{\pi}{3}-C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\Big(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\Big)\cdot\cos\Big(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\Big)\Bigg]\\
&=4R\sin\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2}\Big)\Big[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\Big(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\Big)\Big]\\
&=8R\sin\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

(1) 若 $s-\sqrt{3}(R+r)=0$, 則 $\angle A=60^\circ$ 或 $\angle B=60^\circ$ 或 $\angle C=60^\circ \Leftrightarrow \overline{OI}=\overline{IH}$。

(2) 若 $s-\sqrt{3}(R+r)>0$, 則 $\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2})$, $\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2})$, $\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2})$ 中, 一正二負, 即 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中, 有二個內角大於 $60^\circ \Leftrightarrow \overline{OI}>\overline{IH}$。

(3) 若 $s-\sqrt{3}(R+r)<0$, 則 $\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2})$, $\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2})$, $\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2})$ 中, 二正一負, 即 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中, 有二個內角小於 $60^\circ \Leftrightarrow \overline{OI}<\overline{IH}$。

2. **引理二**: G 在內切圓上 $\Leftrightarrow 5(a^2+b^2+c^2)=6(ab+bc+ca)$

證明: $a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)=2(s^2-4Rr-r^2)$

$$
\begin{aligned}
ab+bc+ca &= 4R^2(\sin A\cdot\sin B+\sin B\cdot\sin C+\sin C\cdot\sin A)\\
&= s^2+4Rr+r^2 \ \cdots\cdots\ (\text{附錄2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G\ \text{在內切圓上}\ &\Leftrightarrow \overline{GI}^2=r^2\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{9}(s^2-16Rr+5r^2)=r^2\\
&\Leftrightarrow r^2-\frac{1}{36}(-4s^2+64Rr+16r^2)=r^2\\
&\Leftrightarrow r^2-\frac{1}{36}\Big(6(s^2+4Rr+r^2)-5\cdot 2(s^2-4Rr-r^2)\Big)=r^2\\
&\Leftrightarrow r^2-\frac{1}{36}\Big(6(ab+bc+ca)-5(a^2+b^2+c^2)\Big)=r^2\\
&\Leftrightarrow 6(ab+bc+ca)=5(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}
$$

3. **引理三**: $s^2\geq\frac{27}{2}Rr$

證明: $2s=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{4Rrs}$

$$
\begin{aligned}
&8s^3\geq 27\cdot 4Rrs\\
&s^2\geq\frac{27}{2}Rr
\end{aligned}
$$

4. **引理四**: $\overline{OI}\geq\overline{IG}$

證明: $\overline{OI}^2-\overline{OG}^2-\overline{IG}^2$

$$
\begin{aligned}
&=R^2-2Rr-\frac{1}{9}(9R^2-2s^2+8Rr+2r^2)-\frac{1}{9}(s^2-16Rr+5r^2)\\
&=\frac{1}{9}(s^2-10Rr-7r^2)\\
&\geq\frac{1}{9}(\frac{27}{2}Rr-10Rr-7r^2)\ \cdots\cdots\ (\text{由引理三})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{7}{18} r(R-2r) \geq 0$$

故不等式成立。

五、四心距離的應用

定理一: O、H 同時在內切圓上, 設 $\angle C > \angle A > \angle B \Leftrightarrow \angle A = 60°$,
$\sin C = \dfrac{(2\sqrt{6}-\sqrt{3})+\sqrt{-5+4\sqrt{2}}}{4}$, $\sin B = \dfrac{(2\sqrt{6}-\sqrt{3})-\sqrt{-5+4\sqrt{2}}}{4}$

證明:

$\overline{IH}^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - s^2$

$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

設 $\overline{IH}$、$\overline{OI}$ 均爲 r,

則 $\begin{cases} 4R^2+4Rr+2r^2-s^2=0 \cdots\cdots (1) \\ R^2-2Rr-r^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

$2\times(2)+(1)$ 得 $s=\sqrt{6}R$

由 (2) 得 $\dfrac{R}{r} = 1 \pm \sqrt{2}$ (負不合), 而

$$\begin{aligned} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C &= \frac{rs}{2R^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R}\cdot\frac{s}{R} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

由引理一, 可令 $\angle A = 60°$, 得

$\sin B \cdot \sin C = 2-\sqrt{2} \cdots\cdots (1)$

又 $s=\sqrt{6}R \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \sqrt{6}$, 得

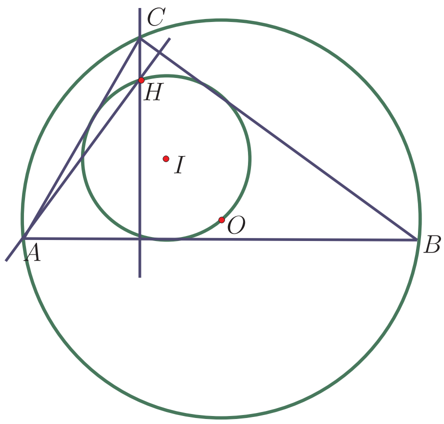
$\sin B + \sin C = \sqrt{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdots\cdots (2)$

由 (1) (2) 及假設 $\angle C > \angle B$, 可解得

$$\sin C = \frac{(2\sqrt{6}-\sqrt{3})+\sqrt{-5+4\sqrt{2}}}{4}, \quad \sin B = \frac{(2\sqrt{6}-\sqrt{3})-\sqrt{-5+4\sqrt{2}}}{4},$$

$\angle B \approx 36°$, $\angle C \approx 84°$

作圖如下:



定理二: 重心、垂心同時在內切圓上 $\Leftrightarrow \sin A, \sin B, \sin C$ 爲方程式 $x^3-2\sqrt{8-2\sqrt{11}}x^2+(10-\frac{5}{2}\sqrt{11})x-2\sqrt{73-22\sqrt{11}}=0$ 的三個實根。

證明:

$\overline{IH}^2=4R^2+4Rr+3r^2-s^2$

$\overline{IG}^2=\frac{1}{9}(s^2-16Rr+5r^2)$

設 G、H 均在內切圓上, 則 $4R^2+4Rr+3r^2-s^2=r^2$ 且 $\dfrac{1}{9}(s^2-16Rr+5r^2)=r^2$

$$\begin{cases} 4R^2+4Rr+2r^2-s^2=0 \ \cdots\cdots \ \text{(i)} \\ s^2-16Rr-4r^2=0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots \ \text{(ii)} \end{cases}$$

由 (i) $s^2=4R^2+4Rr+2r^2$

由 (ii) $s^2=4r^2+16Rr$

$4R^2+4Rr+2r^2=4r^2+16Rr$

$2R^2-6Rr-r^2=0$

$\dfrac{R}{r}=\dfrac{3+\sqrt{11}}{2} \ \cdots\cdots \ \text{(iii)}$

(iii) 代入 (ii) 中, 得

$s^2=(32-8\sqrt{11})R^2$

$\dfrac{1}{4}(a+b+c)^2=(32-8\sqrt{11})R^2$

$\dfrac{1}{2}(a+b+c)=2\sqrt{8-2\sqrt{11}}R$

$\sin A+\sin B+\sin C=2\sqrt{8-2\sqrt{11}}$

由引理二, 得

$$6(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)=5(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$$

則 $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A=10-\dfrac{5}{2}\sqrt{11}$

又 $2Rr=\dfrac{abc}{a+b+c}$, 及 (iii) 得

$$2R\times(\sqrt{11}-3)R=\frac{8R^2\sin A\times\sin B\times\sin C}{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

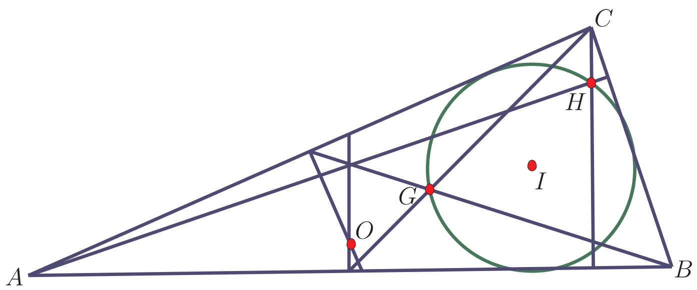
$$\sin A\sin B\sin C=2\sqrt{73-22\sqrt{11}}$$

故 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 爲方程式 $x^3-2\sqrt{8-2\sqrt{11}}x^2+(10-\dfrac{5}{2}\sqrt{11})x$
$-2\sqrt{73-22\sqrt{11}}=0$ 之根。

由電腦軟體解得

$$\sin A\approx 0.390543,\quad \sin B\approx 0.951546,\quad \sin C\approx 0.996073$$
$$\angle A\approx 22.95^\circ,\quad \angle B\approx 72.08^\circ,\quad \angle C\approx 84.87^\circ$$

作圖如下:



定理三: O, G 不能同時在內切圓上

證明: 設 O, G 同時在內切圓上, 則 $\overline{IG}=\overline{IO}$, 但由引理四, 得 $\overline{OI}\geq\overline{IG}$, 等號成立時 O、G 重合, 爲正三角形, 又正三角形時, O、G 不在內切圓上, 故 O、G 不可能同時落在內切圓上。

六、結語

在幾何學的課堂上, 與同學討論到此一問題, 雖然屬於古典幾何的範疇, 但經深入探討後, 發現頗爲有趣, 於此就教於先進。

七、附錄

1. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\dfrac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2}$

證明:

$$
\begin{aligned}
s^2-4Rr-r^2&=s^2-\frac{abc}{\triangle}\cdot\frac{\triangle}{s}-\frac{\triangle^2}{s^2}=s^2-\frac{abc}{s}-\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\\
&=\frac{s^3-abc-(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\\
&=\frac{\frac{1}{8}(a+b+c)^3-abc-\frac{1}{8}(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{\frac{a+b+c}{2}}\\
&=\frac{\frac{1}{8}[2(a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b)]}{\frac{a+b+c}{2}}\\
&=\frac{a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b}{2(a+b+c)}\\
&=\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{2(a+b+c)}\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}
\end{aligned}
$$

故 $\dfrac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$。

2. (1) $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}=\dfrac{s}{R}$。

(2) $\sin A\cdot\sin B+\sin B\cdot\sin C+\sin C\cdot\sin A$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\Big((\sin A+\sin B+\sin C)^2-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\Big)\\
&=\frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{s}{R}\Big)^2-\frac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2}\Big)=\frac{s^2+4Rr+r^2}{4R^2}
\end{aligned}
$$

(3) $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\dfrac{abc}{8R^3}=\dfrac{rs}{2R^2}$。

(4) $\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C$

$$
\begin{aligned}
&=(\sin A+\sin B+\sin C)^3-3(\sin A+\sin B+\sin C)\\
&\quad\times(\sin A\cdot\sin B+\sin B\cdot\sin C+\sin C\cdot\sin A)+3\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\\
&=\Big(\frac{s}{R}\Big)^3-3\Big(\frac{s}{R}\Big)\Big(\frac{s^2+4Rr+r^2}{4R^2}\Big)+3\frac{rs}{2R^2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{s(s^2-6Rr-3r^2)}{4R^3}$$

(5) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})$

$$\begin{aligned}
&= aR^2 + b\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + a\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + bR^2\\
&\quad + c\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + a\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + b\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + cR^2\\
&= (a+b+c)R^2 + bR^2\cos 2C + cR^2\cos 2B + aR^2\cos 2C\\
&\quad + cR^2\cos 2A + aR^2\cos 2B + bR^2\cos 2A\\
&= 2sR^2 + R^2\Big((a+b)\cos 2C + (a+c)\cos 2B + (b+c)\cos 2A\Big)\\
&= 2sR^2 + R^2\Big((2s-c)\cos 2C + (2s-b)\cos 2B + (2s-a)\cos 2A\Big)\\
&= 2sR^2 + 2sR^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)\\
&\quad - R^2(a\cos 2A + b\cos 2B + c\cos 2C)\\
&= 2sR^2 + 2sR^2\Big(3 - 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)\Big)\\
&\quad - R^2\Big(a(1-2\sin^2 A) + b(1-2\sin^2 B) + c(1-2\sin^2 C)\Big)\\
&= 2sR^2 + 6sR^2 - 4sR^2\cdot\frac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2} - R^2(a+b+c)\\
&\quad + 2R^2(a\sin^2 A + b\sin^2 B + c\sin^2 C)\\
&= 8sR^2 - 2s^3 + 8Rrs + 2r^2s - 2sR^2 + 4R^3(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)\\
&= 6sR^2 - 2s^3 + 8Rrs + 2r^2s + s(s^2-6Rr-3r^2)\\
&= 6R^2s + 2Rrs - r^2s - s^3
\end{aligned}$$

3. $\dfrac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C - 1$

證明:

$$\begin{aligned}
&\cos A + \cos B + \cos C\\
&\qquad = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\
&\qquad = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\
&\qquad = 2\sin\frac{A}{2}\Big(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\Big) + 1\\
&\qquad = 2\sin\frac{A}{2}\Big(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\Big) + 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1\\
&= 4\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}+1\\
&= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}+1\\
&= \frac{\dfrac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s\triangle}}{\dfrac{abc}{4\triangle}}+1 \cdots\cdots (\triangle\text{表三角形面積})\\
&= \frac{\dfrac{\triangle^2}{s\triangle}}{R}+1=\frac{r}{R}+1
\end{aligned}
$$

參考文獻

1. Eckard Specht. Eulers Abstand. *Math* 4*u*, from http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/math4u/.
2. 沈文選、張堯、冷崗松編著, 奧林匹克數學中的幾何問題, 湖南師範大學出版社, 2004。

—本文作者任教台北市立內湖高級中學—