數學傳播 32卷3期, pp. 36-40

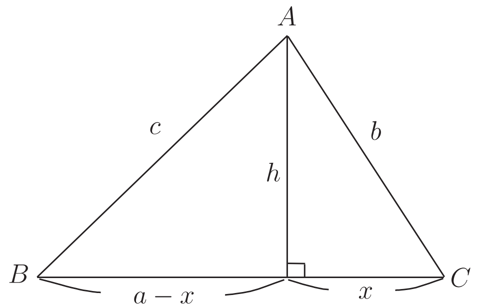
幾何計量的基本工具

張海潮

畢氏定理和相似形比例關係是處理幾何計量問題的兩大支柱。從這兩大支柱又演化出正弦定律和餘弦定律, 應用起來更具威力。然而衆所周知, 在利用正、餘弦定律解題的時候, 由於經常涉及三角恆等式, 因此代數的操作稍重。本文嘗試只利用畢氏定理和相似形比例關係說明如何將三角形的高、中線、分角線和外接圓半徑的長度一一表示成三角形邊長的函數, 藉以突顯這兩大支柱在幾何計量的核心地位。爲了方便解釋, 我們只談銳角三角形; 文末並附上以正、餘弦定律處理相同問題的簡要說明, 供讀者比較。

一. 求三角形高的長度

如圖一



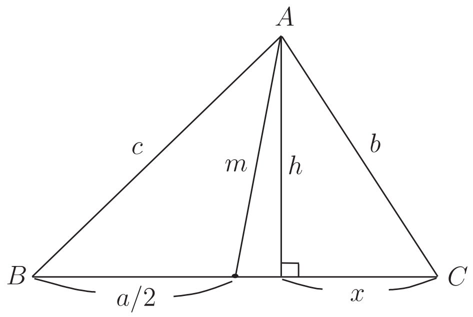
圖一

根據畢氏定理, 有 $b^2-x^2=c^2-(a-x)^2$, 因此解出 $x=a^2+b^2-c^2/2a$ [註一]。又由 $h^2=b^2-x^2$, 得到

$$h^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) \text{ [註二]}$$

二. 求三角形中線的長度

如圖二



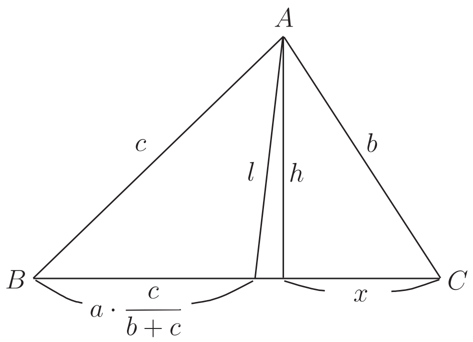
圖二

根據畢氏定理,

$$
\begin{aligned}
m^2 &= h^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \\
&= h^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} \\
&= b^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot x \\
&= b^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\
&= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}
\end{aligned}
$$

三. 求三角形分角線的長度

如圖三 [註三]



圖三

根據畢氏定理

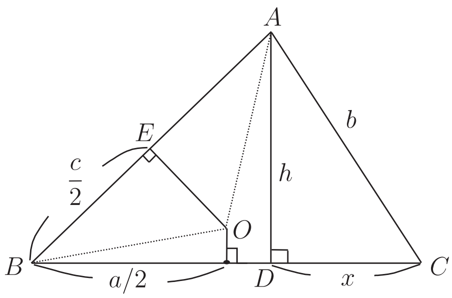
$$\begin{aligned}
l^2 &= h^2 + \Big(\frac{ab}{b+c} - x\Big)^2 \\
&= h^2 + x^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{2ab}{b+c}x \\
&= b^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{2ab}{b+c}\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} \\
&= b^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{b}{b+c}(a^2+b^2-c^2),
\end{aligned}$$

化簡得

$$l^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} \text{ [註四]}$$

四. 求外接圓半徑

如圖四



圖四

圖中, 點 O 爲外接圓圓心, $\overline{OB}=\overline{OA}=R$, 並且 $\angle BOE=\angle C$ [註五], 所以 $\triangle BOE\sim\triangle ACD$。由相似形比例關係:

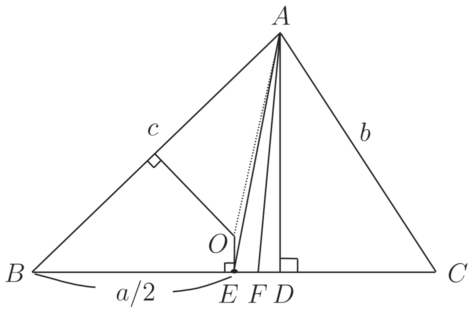
$$R/b = \frac{c}{2}/h,\ \text{得出 } R=bc/2h \text{ 或者 } R=abc/2ha$$

亦即

$$R = abc/4\triangle \text{ [註六]}$$

五. 利用正、餘弦定律解題

如圖五



圖五

圖中, AD 是高, AE 是中線, AF 是分角線, $\overline{AO}=R$ 是外接圓半徑。

(一) $\overline{AD}=b\sin C$, $\overline{AD}^2=b^2\sin^2 C=b^2(1-\cos^2 C)$ 再利用餘弦定律將 $\cos C$ 以 a, b, c 的函數代入。

(二) 根據餘弦定律,

$$\overline{AE}^2=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-ab\cos C$$

再將 $\cos C$ 以 a, b, c 的函數代入。

(三) 根據正弦定律

$$c/\sin\angle AFB=\overline{BF}/\sin\left(\frac{1}{2}A\right)$$

$$b/\sin\angle AFC=\overline{CF}/\sin\left(\frac{1}{2}A\right)$$

所以

$$c/b=\overline{BF}/\ \overline{CF}$$ [註七]

因此

$$\overline{CF}=\frac{b}{b+c}\cdot a$$

根據餘弦定律

$$\overline{AF}^2=b^2+\overline{CF}^2-2b\overline{CF}\cos C$$

再將 $\cos C$ 及 $\overline{CF}$ 以 a, b, c 的函數代入。

(四) 根據正弦定律

$$c/\sin C=2R$$

$$abc/ab\sin C=2R$$

所以

$$R=abc/4\triangle$$

附註

註一: 此式相當於餘弦定律 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$。

註二: 從此式立即導出海龍 (Heron) 公式:

$$\triangle^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}{16}$$

註三: 此處用到角平分線把底邊分成二段, 其比值等於 $\dfrac{c}{b}$。

註四: 不難發現, 在 a 邊上的中線或分角線的長度公式中, b, c 以對稱的角色出現。

註五: $\angle BOA = 2\angle BOE$ 是外接圓的一個圓心角, $\angle C$ 是相關的圓周角。

註六: $\triangle$ 代表三角形的面積, 請見註二。

註七: 同註三。

—本文作者爲台大數學系退休教授—