數學傳播 32卷2期, pp. 19-23

如何算球面的體積?

吳發恩

近年有幾篇關於如何計算歐氏空間中球面 (即空心的球殼) 或球體 (即實心的球) 體積的文章。見文獻 [1]−[5]。除了這些方法之外, 我們在這裡再給出兩種方法。第一種方法的出發點極其簡單, 而第二種稍複雜一點。不過學過微積分與初等微分幾何的讀者都能讀懂。這兩種方法所用到的積分形成鮮明的對比。利用第一種方法, 我們還可以得到歐氏空間中有限錐面的體積。

一、設有一直角三角形, 其斜邊 dA 和鄰邊 dA' 的夾角爲 θ。由餘弦函數的定義顯然有

$$dA' = dA\cos\theta$$

如把 dA 和 dA' 分別理解爲空間中某直線上的線段在另一直線上的投影, 而兩直線的夾角爲 θ, 則上述等式仍成立。此乃解析幾何中的投影定理。兩直線之間的夾角又可改寫爲它們法線之間的夾角。還可進一步把 dA 和 dA' 理解成 $n+1$ 維歐氏空間中超曲面的體積元及其在坐標面上的投影。若設超曲面單位法向量爲 $\vec{n} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$, 選取坐標面爲 $x_{n+1} = 0$, 它的單位法向量爲 $En+1 = (0, \ldots, 0, 1)$, 則顯然有 $\cos\theta = \vec{n}\cdot\vec{E}_{n+1} = \xi_{n+1}$。上面的等式變成

$$dA = \frac{1}{\xi_{n+1}} dA'$$

此式足以讓我們給出 R^{n+1} 中單位球面 S^n 的體積 $Vol(S^n)$。設 S^n 的體積元爲 $d\sigma_n$。因爲 S^n 的位置向量 $\vec{\xi}$ 也是法向量, 考慮到任何球面都分成南北兩半球, 我們有

$$d\sigma_1 = \frac{1}{\xi_2} d\xi_1$$

$$\mathrm{Vol}(S^1) = 2\int_{\xi_1^2\le 1} \frac{1}{\xi_2} d\xi_1 = 2\int_{-1}^{1} \frac{d\xi_1}{(1-\xi_1^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi$$

類似地

$$d\sigma_2 = \frac{1}{\xi_3} d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathrm{Vol}(S^2) = 2\int\int_{\xi_1^2+\xi_2^2\le 1} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{\frac{1}{2}}} \overset{\xi_1 = r\cos\theta}{\underset{\xi_2 = r\sin\theta}{=}} 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{1-r^2}} = 4\pi$$

一般地

$$d\sigma_n = \frac{1}{\xi_{n+1}} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

$$\mathrm{Vol}(S^n) = 2\int_{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le 1} \frac{1}{\sqrt{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_1^2}} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

爲了計算上式右邊的積分, 我們可以作 R^n 中類似的極坐標變換。在這裡我們直接利用文獻 [4] 中注 2 的結果, 即

$$d\xi_1 \cdots \xi_n = r^{n-1} dr d\sigma_{n-1}$$

其中 $r^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$。

二、爲著下面計算的需要, 我們先介紹兩個重要函數的定義和性質。它們都可以在普通的大學數學分析教材中找到。我們把

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

分別叫做 Γ 函數和 B 函數。利用數學分析的知識, 可以證明前者的定義域是 $s > 0$; 後者的定義域是 $p > 0$, $q > 0$。且這兩個函數在它們的定義域內具有各階連續的導數和偏導數。對於任意的 $p > 0$, $q > 0$ 它們之間還有關係式

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

以及加倍公式

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\Big(s + \frac{1}{2}\Big)$$

這樣就有

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(S^n) &= 2\int_0^1 \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1} dr d\sigma_{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} = \mathrm{Vol}(S^{n-1}) \int_0^1 t^{\frac{n-2}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \mathrm{Vol}(S^{n-1}) B\Big(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \mathrm{Vol}(S^{n-1}) \frac{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)}\end{aligned}$$

其中最後一步用到了前面已介紹過的 Γ 函數和 B 函數之間的關係。故得

$$\begin{aligned} Vol(S^n) = Vol(S^0)\prod_{i=1}^{n}\frac{Vol(S^i)}{Vol(S^{i-1})} &= 2\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\Big(\dfrac{i}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{i+1}{2}\Big)} \\ = 2\frac{\Big(\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)\Big)^{n+1}}{\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)} &= 2\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)} \end{aligned}$$

類似地, 可得歐氏空間中有限錐面的體積。定義

$$C_{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m \Big| x_m = \Big(\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}},\quad 0 \le x_m \le a\},\quad m \ge 2$$

爲 R^m 中的有限錐面, 注意到它的單位法向量

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}x_m}(-x_1, \ldots, -x_{m-1}, x_m)$$

所以 $\xi_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$。我們即得

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(C_{m-1}) &= \int_{\sum\limits_{i=1}^{m-1} x_i^2 \le a^2} \sqrt{2}dx_1 \cdots dx_{m-1} \\ &= \sqrt{2}\int_0^a \int_{S^{m-2}} r^{m-2} dr d\sigma_{m-2} = \sqrt{2}\mathrm{Vol}(S^{m-2})\frac{a^{m-1}}{m-1} \end{aligned}$$

我們還可用上面的方法進行微積分中所謂的第一型曲面積分的計算。

三、現介紹第二種計算球面體積的方法, 它屬於初等微分幾何的內容。設 $N = (0, \ldots, 0, 1) \in R^{n+1}$ 爲北極。把 R^n 等同於 R^{n+1} 中 $x_{n+1} = 0$ 的點所成之集。$p = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$, $p \ne N$。令 $\pi : S^n \to R^n$ 爲球極投影, $q = (u_1, \ldots, u_n, 0) = \pi p$。

設坐標原點爲 0, 且設 $\overrightarrow{Nq} = \lambda\overrightarrow{Np}$, λ 爲實數, 則有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{oq} &= \overrightarrow{oN} + \overrightarrow{Nq} \\ &= \overrightarrow{oN} + \lambda\overrightarrow{Np} \\ &= \overrightarrow{oN} + \lambda(\overrightarrow{op} - \overrightarrow{oN}) \end{aligned}$$

因而有

$$(\lambda - 1)\overrightarrow{oN} + \overrightarrow{oq} = \lambda\overrightarrow{op}$$

注意到 $\overrightarrow{oN}$ 垂直於 $\overrightarrow{oq}$, 且 $\overrightarrow{oN}$ 與 $\overrightarrow{op}$ 均為單位向量, 上式兩邊自己與自己作內積 (inner product) 得

$$(\lambda-1)^2+\overrightarrow{oq}^2=\lambda^2$$

解之得

$$\lambda=\frac{1}{2}(1+\overrightarrow{oq}^2)=\frac{1}{2}(1+\sum_{i=1}^{n}u_i^2)$$

又由上面的向量等式兩邊求微分, 得

$$d\lambda\overrightarrow{oN}+d\,\overrightarrow{oq}=d\lambda\,\overrightarrow{op}+\lambda d\,\overrightarrow{op}$$

注意到 $\overrightarrow{oN}$ 與 $d\,\overrightarrow{oq}$ 仍然垂直, $\overrightarrow{op}$ 與 $d\,\overrightarrow{op}$ 也垂直, $\overrightarrow{oN}$ 與 $\overrightarrow{op}$ 的長度都是 1, 上式兩邊自己與自己作內積, 得

$$(d\lambda)^2+(d\,\overrightarrow{oq})^2=(d\lambda)^2+\lambda^2(d\,\overrightarrow{op})^2$$

整理得

$$(d\,\overrightarrow{op})^2=\Big(\frac{1}{\lambda}d\,\overrightarrow{oq}\Big)^2$$

因為 $\overrightarrow{op}$ 與 $\overrightarrow{oq}$ 分別表示 S^n 與 R^n 的位置向量, 所以上式說明 S^n 與 R^n 成共形 (Conformal) 對應, 故得這兩個空間的體積元之間的關係為

$$d\mathrm{Vol}S^n=\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^n d\mathrm{Vol}R^n$$

我們有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S^1)&=\int_{R^1}\frac{2du_1}{1+u_1^2}=2\arctan|_{-\infty}^{\infty}=2\pi\\
\mathrm{Vol}(S^2)&=\int_{R^2}\Big(\frac{2}{1+u_1^2+u_2^2}\Big)^2du_1du_2\\
&=2\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{2r}{(1+r^2)^2}drd\theta=4\pi\Big(-\frac{1}{1+r^2}\Big)\Big|_0^{+\infty}=4\pi
\end{aligned}$$

一般地

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S^n)&=\int_{R^n}\left(\frac{2}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2}\right)^n du_1\cdots du_n\\
&=\int_0^{+\infty}\int_{S^{n-1}}\Big(\frac{2}{1+r^2}\Big)^n r^{n-1}drd\sigma_{n-1}
\end{aligned}$$

令 $r=\tan\theta$,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \mathrm{Vol}(S^{n-1})2^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin\theta)^{n-1}d\theta = 2^{n-1}B\Big(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\Big)\mathrm{Vol}(S^{n-1})\\ &= \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)^2\mathrm{Vol}(S^{n-1}) = \mathrm{Vol}(S^{n-1})\frac{\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)}\end{aligned}$$

其中倒數第二個等號再一次用到了前面已介紹過的 Γ 函數和 B 函數之間的關係以及 $\Gamma(n)=(n-1)!$。最後一個等號用到了加倍公式當 $s=\dfrac{n}{2}$ 時的情形以及 $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=\sqrt{\pi}$。剩下的計算就與第一種方法完全一樣了。有趣的是兩種方法都用到了廣義積分, 第一種用到了瑕積分, 第二種用到了無窮積分。

致謝: 本人獲得國家留學基金和國家自然科學基金 (10571088) 的資助, 特此致謝!

參考文獻

1. L. Badger, Geometry of the measure of n-balls, *Amer. Math. Monthly*, 107(2000), 256-258.
2. O. Hijab, The Volume of the unit ball in C^n, *Amer. Math. Monthly*, 107(2000), 259.
3. J. A. Baker, Integration over spheres and the divergence theorem for balls, *Amer. Math. Monthly*, 104(1997), 36-47.
4. G. B. Folland, How to integrate a polynomial over a sphere, *Amer. Math. Monthly*, 108(2001), 446-448.
5. Jean B. Lasserre, A quick proof for the volume of n-balls, *Amer. Math. Monthly*, 108(2001), 768-769.

—本文作者任教於北京交通大學理學院數學系—