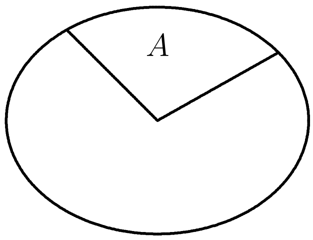
數學傳播 32卷2期, pp. 13-18

橢圓內部點與兩邊界點形成之面積

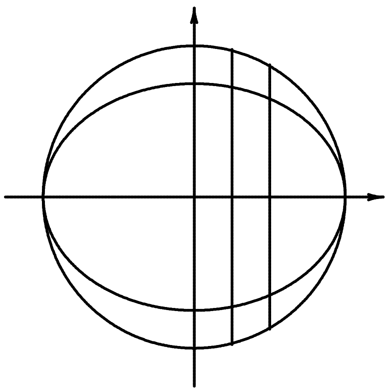
郭錕霖

最近有一位任教於高中的數學老師向我提及一個數學問題: 橢圓邊界任兩點與橢圓中心所形成的區域面積 (A, 如圖一所示) 為何?



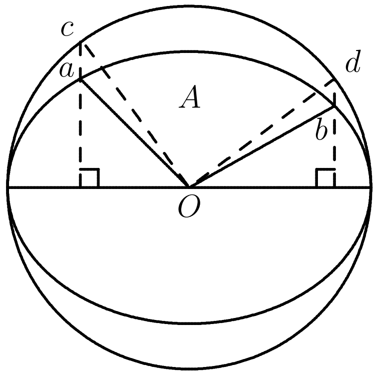
圖一

這個問題當然可用積分來解決, 然而, 若以高中生的角度來看這個問題, 積分的計算可能超過目前教科書的範圍, 因此我想到在八十七學年度大學聯考自然組的試題中有一題的概念可以拿來解決求 A 的問題, 當時的題目 (非選擇題第四題) 是: 如圖二, 圓 $x^2+y^2=16$ 內含一橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 設圓內部在兩直線 $x=1$. $x=2$ 之間的面積為 C, 而橢圓內部在此兩直線之間的面積為 E, 則 $\dfrac{C}{E}$ 等於?



圖二

由橢圓方程式可知其半長軸長爲4, 半短軸長爲3, 此橢圓可視爲將半徑爲4的圓上下壓縮 $\dfrac{3}{4}$ 倍所形成, 因此 $E=\dfrac{3}{4}C$, 可得 $\dfrac{C}{E}=\dfrac{4}{3}$ 。我們將使用這種壓縮的觀念來解決本文的問題。關於壓縮的更多觀念可見蔣聲(1994) 所著的幾何變換一書中的第八章「平行投影和伸縮變換」。



圖三

我們處理的方式如圖三, 假設橢圓半長軸長爲 r_1, 半短軸長爲 r_2。令 B 爲以 r_1 爲半徑之圓其扇形 Ocd 的面積, 則 $A=\dfrac{r_2}{r_1}B$。設扇形 Ocd 的夾角爲 θ, 透過扇形面積公式 $\dfrac{1}{2}r_1^2\theta$, 則可得 $A=\dfrac{r_2}{r_1}B=\dfrac{1}{2}r_1r_2\theta$, 由這個式子可以很容易瞭解整個橢圓面積爲 $r_1r_2\pi$ (考慮 $\theta=2\pi$)。此時整個解題關鍵在於如何計算 θ, 假設 c 點座標爲 (c_1,c_2), d 點座標爲 (d_1,d_2), O 爲原點, 則

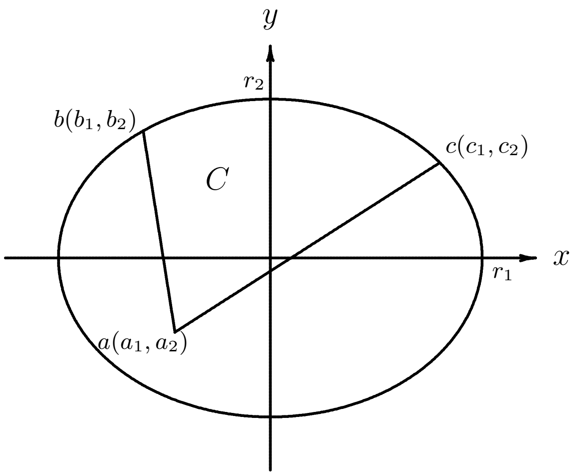
$$\cos\theta=\frac{c_1d_1+c_2d_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}}=\frac{c_1d_1+c_2d_2}{r_1^2}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\left(\frac{c_1d_1+c_2d_2}{r_1^2}\right)$$

在圖三中, 若我們假設 $a(a_1,a_2)$ 與 $b(b_1,b_2)$, 則可知 $c_1=a_1, c_2=\dfrac{r_1}{r_2}a_2, d_1=b_1, d_2=\dfrac{r_1}{r_2}b_2$, 因此我們得到以下結論:

結論一:設橢圓中心點爲原點 O, 半長軸長爲 r_1, 半短軸長爲 r_2, 其中 $r_1>r_2$。考慮橢圓上任兩點 $a(a_1,a_2)$ 與 $b(b_1,b_2)$, 則 Oab 的面積爲

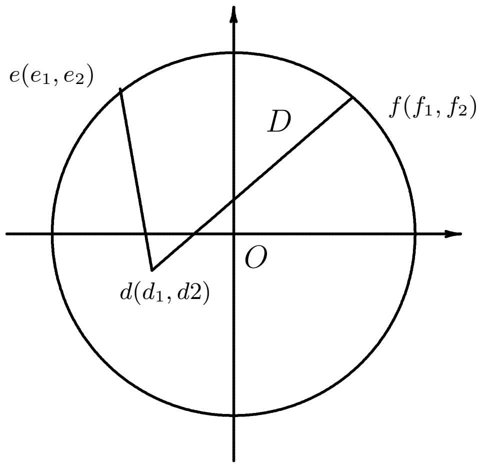
$$\frac{1}{2}r_1r_2\cos^{-1}\left(\frac{r_2^2a_1b_1+r_1^2a_2b_2}{r_1^2r_2^2}\right)$$

顯然, 我們已大致解決計算 A 的問題。本文嘗試將這個問題推廣爲橢圓邊界任相異兩點與橢圓任一內部點所形成的區域面積 (C, 如圖四所示) 爲何?



圖四

不失一般性, 我們讓橢圓中心位於座標平面的原點, 若橢圓中心並非原點, 我們可透過平移來處理; 若圖形是斜橢圓, 我們可透過旋轉來處理。爲了使用壓縮的概念來求解 C, 我們必須建構一個公式來計算圓邊界任相異兩點與圓任一內部點所形成的區域面積 (D, 如圖五所示)。



圖五

我們將 D 分解成兩個部分:D_1 是三角形 def 的面積, D_2 是弧 ef 與線段 ef 所圍成的面積。設 O 爲原點, r_1 爲半徑, 則

$$D_1 = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2 \\ 1 & e_1 & e_2 \\ 1 & f_1 & f_2 \end{pmatrix}\right|$$

(D_1 的算法可參見項武義教授所撰寫的基礎幾何學第三節, 目前該文收錄於數學知識網站[1]), 其中 $|\ |$ 表示絕對值的記號,

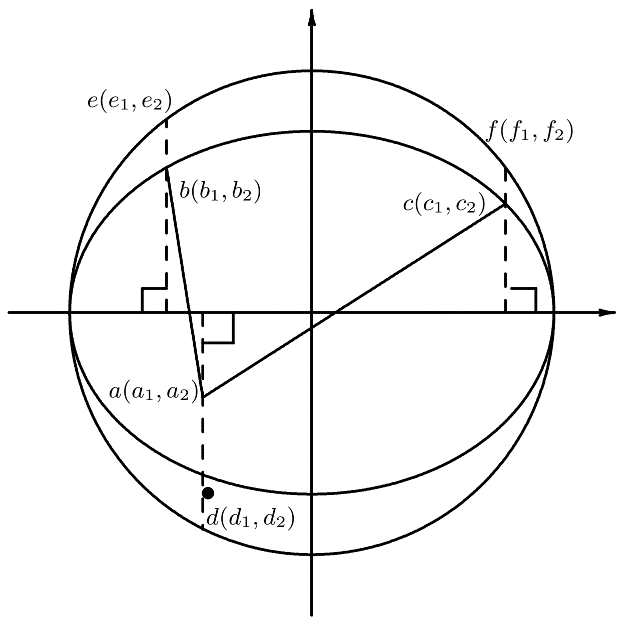
$$\begin{aligned} D_2 &= \text{扇形 } Oef \text{ 面積} - \text{三角形 } Oef \text{ 面積}\\ &= \frac{1}{2}r_1^2\cos^{-1}\left(\frac{e_1f_1+e_2f_2}{r_1^2}\right) - \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & e_1 & e_2\\ 1 & f_1 & f_2\end{pmatrix}\right| \end{aligned}$$

於是, $D = D_1 + D_2$, 因此我們有以下的結論。

結論二: 設圓心爲原點 O, 半徑爲 r_1。考慮圓內任一點 $d(d_1, d_2)$ 及圓上任兩點 $e(e_1, e_2)$ 與 $f(f_1, f_2)$, 則由 d, e, f 所圍成的面積爲

$$\frac{1}{2}r_1^2\cos^{-1}\left(\frac{e_1f_1+e_2f_2}{r_1^2}\right) - \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & e_1 & e_2\\ 1 & f_1 & f_2\end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2\\ 1 & e_1 & e_2\\ 1 & f_1 & f_2\end{pmatrix}\right|$$

下圖顯示我們如何將結論二應用於橢圓上,



圖六

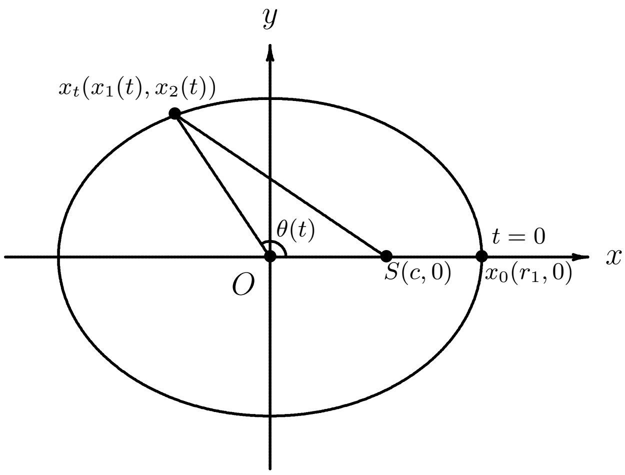
[1]數學知識網站 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_wy_geo_toc.htm

在圖六中, 半徑爲 r_1 的圓經過上下壓縮 $\dfrac{r_2}{r_1}$ 倍後形成圖六的橢圓, 並且 $d_1 = a_1$, $d_2 = \dfrac{r_1}{r_2}a_2$, $e_1 = b_1$, $e_2 = \dfrac{r_1}{r_2}b_2$, $f_1 = c_1$, $f_2 = \dfrac{r_1}{r_2}c_2$, 此外, 若令橢圓中由 a, b, c 所圍成的面積爲 C, 令圓中由 d, e, f 所圍成的面積爲 D, 則 $C = \dfrac{r_2}{r_1}D$, 因此根據結論二, 我們可推得結論三。

結論三: 設橢圓中心點爲原點 O, 半長軸長爲 r_1, 半短軸長爲 r_2, 其中 $r_1 > r_2$。考慮橢圓內任一點 $a(a_1, a_2)$ 與橢圓上任兩點 $b(b_1, b_2), c(c_1, c_2)$, 則由 a, b, c 所圍成的面積爲

$$\frac{1}{2}r_1r_2\cos^{-1}\left(\frac{r_2^2b_1c_1 + r_1^2b_2c_2}{r_1^2r_2^2}\right) - \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\right|$$

最後, 我們試著使用結論三來論證高中物理所提及的克卜勒第二定律 (Kepler's second law): 行星與太陽的連線在相同時間掃過相同面積。考慮圖七的行星運行軌道, 令 S 爲太陽, 其位置位於橢圓的焦點, M 是其質量, G 是萬有引力常數, x_0 是行星位於近日點的位置, 並且令此時 $t = 0$, 行星經過 t 時間後來到 x_t 的位置, $\theta(t)$ 是偏近點角 (eccentric anomaly, $\angle x_tOx_0$), r_1 是半長軸長, r_2 是半短軸長, c 是焦半徑, e 是離心率 ($e = c/r_1$), T 是行星的週期。



圖七

假設 $A(t)$ 是行星與太陽的連線在 t 時間掃過的面積 (即由 x_t, S, x_0 所圍成的面積), 我們有以下的公式 (見 Landau and Lifshitz, 1976, Sec. 15, Chap. 3) 可利用,

$$(1)\ t = \sqrt{\frac{r_1^3}{GM}}(\theta - e\sin\theta) \qquad (2)\ x_1(t) = r_1\cos\theta(t) \qquad (3)\ x_2(t) = r_2\sin\theta(t)$$

不失一般性, 我們討論 $0<t<T/2$ (即 $0<\theta(t)<\pi$) 的狀況, 由結論三的公式可得到

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{1}{2}r_1r_2\cos^{-1}\left(\frac{r_2^2r_1x_1(t)}{r_1^2r_2^2}\right)-\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & r_1 & 0\\ 1 & x_1(t) & x_2(t)\end{pmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & c & 0\\ 1 & r_1 & 0\\ 1 & x_1(t) & x_2(t)\end{pmatrix}\right|\\
&= \frac{1}{2}r_1r_2\theta(t)-\frac{1}{2}cr_2\sin\theta(t)\\
&= \frac{1}{2}r_1r_2(\theta(t)-e\sin\theta(t))\\
&= \frac{r_2t\sqrt{GM}}{2\sqrt{r_1}}\\
&\propto t
\end{aligned}$$

上式代表: 行星與太陽連線在 t 時間掃過的面積 $A(t)$ 與時間 t 成正比, 此即爲克卜勒行星第二定律。關於克卜勒定律的故事, 讀者可參考姚珩、黃秋瑞 (2003)、姚珩 (2004)。

本文的三個結論甚少在高中教科書有討論, 但其推論過程省去了積分的技巧, 因此對於高中生並不難瞭解, 我們認爲其可作爲高中課程的補充教材。在應用上, 我們與克卜勒第二定律作連結, 期待有其他教師可以將我們的結論作其他領域的應用。

誌謝: 感謝國立台灣師範大學物理系姚珩教授提供本文有關行星運動的知識, 也感謝審稿人提出的建言, 讓本文更具意義。

參考文獻

1. 姚珩、黃秋瑞 (2003), 克卜勒行星橢圓定律的初始內涵, 科學教育月刊, 第256期, 第33-45頁。
2. 姚珩 (2004), 行星面積定律的建立, 科學教育月刊, 第274期, 第32-38頁。
3. 蔣聲 (1994), 幾何變換, 凡異出版社。
4. Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1976), Mechanics, Burlington, MA.:Elsevier Inc.

—本文作者國立政治大學應用數學系博士候選人—