數學傳播 32卷2期, pp. 3-12

從刻卜勒到牛頓
—千古迷題破解日,萬有引力發現時

項武義 · 張海潮

一、導言

1609年, 刻卜勒 (1571∼1630) 出版「新天文學」(Astronomia Nova), 提出行星繞太陽運行的橢圓律和面積律:

(一) 橢圓律: 行星繞日的軌道是橢圓, 太陽位居橢圓的一個焦點。

(二) 面積律: 行星與太陽的連線段在等長的時間掃過相同的面積。

1618年, 刻卜勒又出版「世界的和諧」(Harmonice Mundi), 並提出週期律:

(三) 週期律: 行星繞行太陽一周所需的時間 T 和行星軌道的半長軸 a, 滿足 $\dfrac{a^3}{T^2}$ 爲定值, 與個別的行星無關。

刻卜勒提出的這三大行星律導致牛頓發現萬有引力-引力存在於任意兩個質點之間, 其大小爲

$$F = G\frac{M_1M_2}{\overline{O_1O_2}^2}$$

式中, M_1、M_2 分別是兩質點的質量, $\overline{O_1O_2}$ 是兩質點之間的距離, G 是萬有引力常數。

牛頓在刻卜勒提出行星律 70 年後, 於 1687 年出版「自然哲學之數學原理」(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica), 書中詳細的說明了如何以數學的論證, 從三大行星律得出萬有引力定律, 但是由於牛頓的證明過分複雜, 不容易理解; 我們因此在本文中提出比較簡潔的論證, 希望能淸楚的交代行星律與萬有引力之間的關係。在證明之中, 我們將充分利用橢圓的光學性質, 又因爲位置函數對時間的微分是速度, 速度函數對時間的微分是加速度, 所以我們還要用到一點基本的微分公式, 例如 $\dfrac{d\sin\theta}{d\theta} = \cos\theta$, $\dfrac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$, 連鎖規則 $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ 以及萊布尼茲規則 $\dfrac{d}{dt}(xy) = \dfrac{dx}{dt}y + x\dfrac{dy}{dt}$ 等等, 希望本文的處理方式能讓學過一點微積分的

高中同學可以讀懂。附帶一提的是本文經常沿用牛頓的習慣, 用一點代表對時間的微分, 例如

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$$

二、面積律等價於加速度向量指向太陽

如圖 (一):

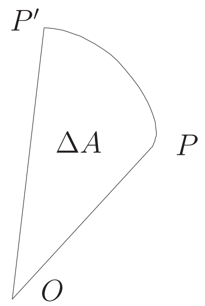

圖 (一)

太陽位居原點, 在時段 Δt, 行星從 P 點走到 P' 點, 掃過的面積是 ΔA, 面積律等價於 $\dfrac{dA}{dt}$ 是一個常數。因為 $\dfrac{dA}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$, 將 OPP' 的面積 ΔA 除以 Δt, 再取極限, 相當於固定 OP, 而將弧長 PP' 除以 Δt 再取極限, 極限正是 $\vec{v}$, 因此 $\dfrac{dA}{dt}$ 就是 $\overrightarrow{OP}$ 和速度向量 $\vec{v}$ 所決定的三角形面積

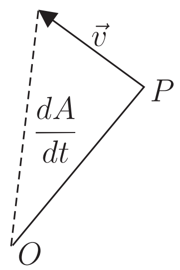

圖 (二)

另一方面, 在極坐標的架構之下, 如圖 (三):

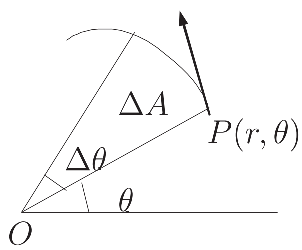

圖 (三)

由於 ΔA 近似扇形面積 $\dfrac{1}{2}r^2\Delta\theta$, 其中 $r=\overline{OP}$, 所以 $\dfrac{dA}{dt}$ 的另一個表示是 $\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}$ 或是 $\dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}$。

現在, 將 $\overrightarrow{OP}=(x,y)$ 和 $\vec{v}=(\dot{x},\dot{y})$ 所決定的三角形面積以行列式寫出

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y) = \frac{dA}{dt}$$

面積律 ($\dfrac{dA}{dt}$ 是一個常數) 表示 $\dfrac{d(x\dot{y}-\dot{x}y)}{dt}=0$, 或者 (萊布尼茲乘法規則) $\ddot{x}y-x\ddot{y}=0$, 而後者又等價於向量 (x,y) 與 $(\ddot{x},\ddot{y})$ 只差一個倍數, 在行星繞日的情形, 這相當於加速度向量 $(\ddot{x},\ddot{y})$ 與位置向量 (x,y) 平行但是反向, 亦即面積律等價於向心加速度。

在後續的討論中, $k=\dfrac{dA}{dt}$ 這個常數代表 $\dfrac{\pi ab}{T}$, 其中 a,b 分別是橢圓的半長軸和半短軸, πab 是橢圓的面積, T 是行星繞日的週期, 因此有

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=k=\frac{\pi ab}{T} \tag{1}$$

三、從面積律和橢圓律推得向心加速度服從平方反比的規律

在下面的論證中, 橢圓扮演了關鍵的角色, 其中最重要的是光學性質和因此得出的焦切距乘積定理。

如圖 (四), 太陽位於焦點之一的 F_1, 行星的位置在 P, 橢圓的半長軸是 a, 半短軸是 b, $c^2=a^2-b^2$, 過 P 點的切線是 l。

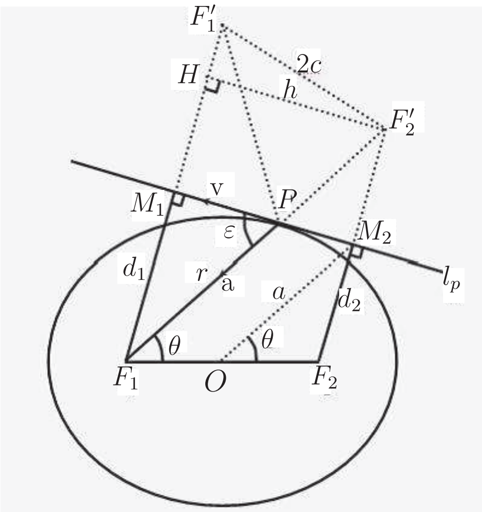

圖 (四)

所謂的焦切距乘積定理是指兩個焦點到切線 l 的距離 d_1, d_2 的乘積等於 b^2。此定理的證明如下:

圖 (四) 中, F_1' 和 F_2' 是橢圓的焦點 F_1, F_2 相對於切線 l 的對稱點, d_1, d_2 是 F_1, F_2 到 l 的距離, 橢圓的光學性質告訴我們

$$F_1F_2' = F_2F_1' = 2a$$

並且 $F_1F_2F_2'F_1'$ 構成一個等腰梯形, 令 h 爲等腰梯形的高, 則有

$$4a^2 = \overline{F_1F_2'}^2 = \overline{F_1H}^2 + \overline{HF_2'}^2 = (d_1+d_2)^2 + h^2$$

$$4c^2 = \overline{F_1'F_2'}^2 = \overline{F_1'H}^2 + \overline{HF_2'}^2 = (d_1-d_2)^2 + h^2$$

兩式相減得

$$4a^2 - 4c^2 = 4d_1d_2$$

所以

$$d_1d_2 = a^2 - c^2 = b^2 \tag{2}$$

有了 $d_1d_2 = b^2$ 之後, 我們回到面積律, 從速度向量的性質透過微分來了解加速度向量, 如圖 (四), $\angle M_1PF_1 = \varepsilon$, F_1P 和 $\vec{v}$ 所決定的三角形面積是 $\frac{1}{2}|\vec{v}|r\sin\varepsilon$, 由面積律 $|\vec{v}|r\sin\varepsilon = \frac{2\pi ab}{T}$, 因爲 $r\sin\varepsilon = d_1$, 由式 (2) $r\sin\varepsilon = d_1 = \frac{b^2}{d^2}$, 而有

$$|\vec{v}| = \frac{2\pi ab}{Td_1} = \frac{2\pi a}{bT}\overline{F_2M_2}$$

注意到 $\overrightarrow{OMZ} = a$, 所以

$$\overline{F_2M_2} = \overline{F_2O} + \overline{OM_2} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

將 $\overline{F_2M_2}$ 逆時鐘旋轉 $90°$, 得到向量

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

這個向量的 $\frac{2\pi a}{bT}$ 倍就是 $\vec{v}$, 所以

$$\vec{v} = \frac{2\pi a}{bT}\begin{pmatrix} 0 \\ -c \end{pmatrix} + \frac{2\pi a^2}{bT}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

對 t 微分得到

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{d\theta}\vec{v}\cdot\dot{\theta} &= \frac{2\pi a^2}{bT}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\frac{2\pi ab}{T}\cdot\frac{1}{r^2}\\ &= \frac{\pi^2}{2}\frac{(2a)^3}{T^2}\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

或

$$|\vec{a}| = 4k^2\frac{a}{b^2}\frac{1}{r^2}$$

在上式中, 如果將週期律的 a^3/T^2 是常數也考慮進來, 則 $\vec{a}$ 不但與距離的平方成反比, 並且比例常數 $\dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{(2a)^3}{T^2}$ 與個別的行星無關。這是我們稱此引力爲萬有的基本理由。反之, 如果我們知道太陽對行星的引力是向心的, 並且大小與距離的平方成反比, 我們是否能夠回答行星的軌道是橢圓, 太陽位居焦點之一?

首先, 向心力保證質點 P 在平面上運動, 原因是

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP}\times\vec{v}) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right)\times\vec{v} + \overrightarrow{OP}\times\vec{a} = \vec{v}\times\vec{v} + \overrightarrow{OP}\times\vec{a} = 0$$

這表示角動量 $\overrightarrow{OP}\times\vec{v}$ 是一個常數向量 $\vec{L}$, 但是 $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{L}=0$, 所以 P 點在一個與 $\vec{L}$ 垂直的平面上運動, 因此以下, 我們討論平面運動, 並且假設向心力的大小與距離的平方成反比。

四、假設加速度向心而且滿足

$$\vec{a} = \frac{K}{r^2}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix},\quad K>0$$

則運動的軌跡是以太陽爲焦點的錐線。

證明: 向心加速度保證面積律, 因此有常數 k 使下式成立:

$$r^2\dot{\theta} = 2k$$

將速度 $\vec{v}$ 對 θ 微分得到

$$\frac{d}{d\theta}\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \vec{a}\frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{K}{2k}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

解 $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{K}{2k}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} + \vec{c}$$

其中 $\vec{c}$ 是一個常數向量。

如圖 (五):

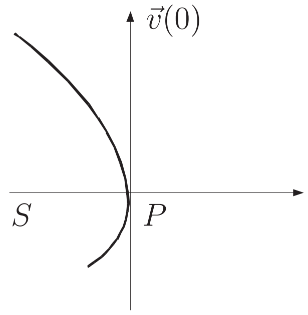

圖 (五)

不妨假設在 $\theta=0$ 時, $\vec{v}(0)$ 垂直向上, 則有

$$\vec{v}(\theta)=\frac{K}{2k}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ |\vec{c}|\end{pmatrix}$$

$\vec{v}$ 與位置向量 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 決定的平行四邊形面積是行列式

$$r\begin{vmatrix}\cos\theta & \dfrac{K}{2k}(-\sin\theta)\\ \sin\theta & \dfrac{K}{2k}\cos\theta+|\vec{c}|\end{vmatrix}$$

代入面積律 (式 (1))

$$2k=r\begin{vmatrix}\cos\theta & \dfrac{K}{2k}(-\sin\theta)\\ \sin\theta & \dfrac{K}{2k}\cos\theta+|\vec{c}|\end{vmatrix}$$

亦即

$$\frac{1}{r}=\frac{K}{(2k)^2}(1+e\cos\theta),\quad e=\frac{2k|\vec{c}|}{K}$$

這是離心率爲 e 的錐線方程式。

在上面的討論裡, 我們首先說明了面積律和向心力是等價的, 接著我們說明了面積律, 橢圓律加上週期律和萬有引力是等價的, 這些內容構成了「原理」一書卷一, 命題1, 2, 11 和 17。細心的讀者不難發現在上述的討論中, 已經假設了太陽、行星都是質點, 因此所謂的距離其實是指質點和質點之間的距離。

當太陽和行星之間的距離遠大於它們的大小時, 這樣的假設是合理的, 但是當距離相近, 情形便不是那麼單純, 比方說, 地球之於蘋果。如果將地球視爲質點的集合, 而考慮這些質點對蘋果的吸引力, 這些個別質點的吸引力由於質點與蘋果之間的距離大不相同, 個別吸引力相加之後, 基本上很難估算, 更不用說進一步解釋爲什麼重力加速度是 9.8 公尺/秒平方, 除非認爲這

些個別的引力可以視爲集中在地心, 也就是所謂的「地心引力」在吸引蘋果落地, 這正是「原理」一書卷一的命題 71, 我們將在下節討論。

五、地心引力

密度均勻的球殼作用於球殼外一個質點 P 的 (平方反比) 引力, 等於把球殼的總質量集中在球心, 由在球心的質點直接施力於 P 的引力。

以下的證明首見王其允、項武義「是蘋果還是開普勒啓發了牛頓?」台北科學月刊 1970 年, 8 月號。

如圖 (六):

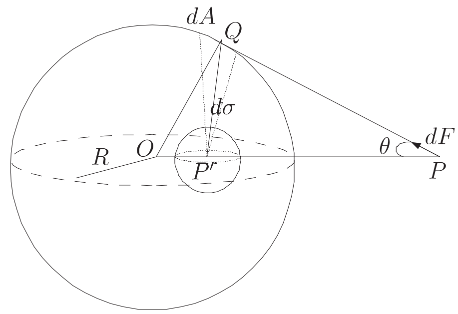

圖 (六)

設有一半徑爲 R, 密度均勻的球殼, 對球殼外一點 P, 施予平方反比的吸引力, 我們要證明對 P 點的總吸引力可視爲球殼質量集中於球心, 由球心施於 P 點的吸引力。在球殼內取 P' 點, 使 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=R^2$, 亦即 $\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{OQ}:\overline{OP'}$, 因此 ΔOPQ 和 $\Delta OQP'$ 相似, 並且

$$\angle OQP' = \angle OPQ (:= \theta)$$

$$\overline{P'Q}:\overline{QP}=\overline{OQ}:\overline{OP}$$

由於球的對稱性, 球殼對 P 點的總吸引力是

$$\sum |dF|\cos\theta$$

其中 $|dF|$ 和 $\dfrac{dA}{\overline{QP}^2}$ 成正比。

因此等於求和 $\displaystyle\sum \frac{dA\cos\theta}{\overline{QP}^2}$

如圖 (七):

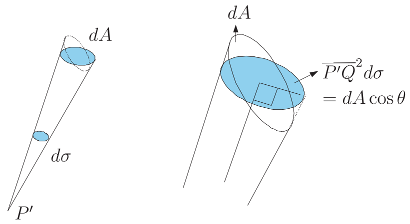

圖 (七)

令 $d\sigma$ 爲以 P' 爲球心, 單位長爲半徑, 對 dA 所張出的立體角, 由投影關係得到

$$dA\cos\theta = \overline{P'Q}^2 d\sigma$$

所以

$$\begin{aligned}\sum \frac{dA\cos\theta}{\overline{QP}^2} &= \sum \frac{\overline{P'Q}^2}{\overline{QP}^2} d\sigma = \sum \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{OP}^2} d\sigma \\ &= \sum \frac{R^2 d\sigma}{\overline{OP}^2} = \frac{4\pi R^2}{\overline{OP}^2}\end{aligned}$$

亦即球殼對 P 點的吸引力, 可以是視爲球殼的質量集中在球心, 由球心直接施於 P 點的吸引力。

六、結語

本文嘗試搭建一座簡便的橋樑來聯繫刻卜勒的行星律和牛頓的萬有引力定律。回顧 1687 年出版的「原理」一書, 此書最主要的成就就是建立這個至關重要的聯繫, 牛頓在書中演繹了四大命題, 這四大命題分別是:

命題一、(平面運動時) 面積律與作用力向心等價
(原理卷一, 命題1, 2)

命題二、如果橢圓律與面積律成立, 則向心力服從平方反比的規律
(原理卷一, 命題 11)

命題三、如果行星所受向心力的大小與至太陽的距離平方成反比, 則行星繞日的軌道是橢圓, 太陽居其一焦點。
(原理卷一, 命題 17)

命題四、證明均勻球殼作用於球殼外一個質點 P 的 (平方反比) 引力, 等於把球殼的總質量集中在球心 O, 由在球心 O 的質點直接施於質點 P 的引力。
(原理卷一, 命題 71)

牛頓因爲這一偉大成就, 三百年來, 榮耀無限。舉例言之, 1983 年的諾貝爾獎得主 S.Chandrasekhar 基於對牛頓的仰慕, 即使年逾八十, 仍然老當益壯, 寫了一本近六百頁的導讀, 不過細查這本導讀, 對以上四個命題的證明並沒有做本質上的簡化。

衆所周知, 刻卜勒的三大行星律可以說是歷史上最偉大的實驗性定律, 亦即太陽系之運行乃是大自然的創作, 自有人類文明, 就開始觀察記錄和千方百計加以解釋, 再由哥白尼 (1473∼1543) 的日心說改弦更張, 而且又有伽利略 (1564∼1642) 爲了宣揚日心說而遭教廷終生監禁。直到刻卜勒盡畢生之力綜理所有的結果—包括他得以繼承的第古 (1546∼1601) 所留下畢生天文觀測資料—終於先行發現火星繞日的軌道是橢圓, 太陽不在中心, 而是偏居在橢圓的兩個焦點之一, 並且再接再厲, 發現第一、第二定律對於其他五個行星也同樣成立, 以及統合六者的第三定律。

感謝大自然, 願意對刻卜勒洩漏橢圓的秘密! 千古之謎終於得解, 萬有引力定律也就呼之欲出了。

牛頓對行星律到萬有引力定律的數理分析, 亦即四大命題的證明, 除了面積律與向心等價這個命題之外, 對其他三個命題的證明都難讀難懂。照理說, 刻卜勒放棄了等速圓運動的想法, 又具體的提出了橢圓律和面積律, 再由此導出向心力服從平方反比的規律時, 應該非常淸楚的讓讀者看到橢圓 (或錐線) 與面積律在此處扮演的關鍵角色。又比方說, 地球對蘋果的引力必須集中於球心 (否則無法稱爲地心吸力或萬有引力), 證明的過程也應該充分展現球的對稱性和與球對稱密切搭配的平方反比規律才是, 但是牛頓的證明步驟繁複, 幾經轉折, 往往讓讀者難以掌握。本文最主要的目的就是對這四大命題重新做出簡明淸晰的證明。

我們深信, 唯有以至精至簡, 返璞歸眞的方式重新理解行星律通往萬有引力定律的進程, 方能彰顯大自然的恩典, 從而啓迪後學, 樂意投身理性文明的繼承與發揚。

参考文獻

1. Johannes Kepler (刻卜勒), *Mystery of the Cosmos* (宇宙的奧秘), 1596,
   Astronomic Nova (新天文學) 1609,
   Harminice Mundi (世界的和諧) 1618.
   網路資源
   Johannes Kepler:en.wikipedia.org/wiki/Kepler
2. Issac Newton (牛頓), *The Mathematical Principle of Natural Philosophy or Principia* (自然哲學之數學原理, 簡稱原理) 1687.
3. S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, (導讀), Oxford: Clarendon, 1995
4. 站在巨人肩上叢書, *On the shoulders of giants*, 中文版由台北大塊文化出版股份有限公司出版。

5. Hai-Chau Chang and Wu-Yi Hsian, *A Journey from Kepler's laws of planet' motion to Newton's laws of universal gravitation revisited*, Arxiv.org (0801.0308 Jan. 2008. physics. gen-ph)
6. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.
7. 王其允, 項武義, 是蘋果還是開普勒啓發了牛頓? 科學月刊, 1970 年 8 月號, 台北。
8. V. I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhauser Verlag, Boston, 1990.
9. J. Clerk Maxwell, *Matter and Motion*, 1920.
10. David Derbes, *Reinventing the wheel: Hodographic solution to the Kelper problems*, American Association of Physics Teachers 2001, Am. J. Phys. 69(4), April 2001. http://ojps.aip.org/ajp/
11. D. Goodstein and J. R. Goodstein, *Feynman's Lost Lecture-The Motion of Planet Around the Sun*, 1996.
12. 王嘉慶, 從刻卜勒到牛頓—分析牛頓的幾何論證, 台灣大學數學系碩士論文, 2007.
13. 相關網站

    (1) http://arxiv.org/abs/0801.0308

    (2) http://www.math.ntu.edu.tw/home_c.htm

    後者爲台大數學系網站, 其內容除了論證牛頓《原理》中的四大命題, 還包括對此一問題歷史發展的回顧, 並作若干評論。

—本文作者項武義爲美國柏克萊大學退休教授, 張海潮爲台大數學系退休教授—