數學傳播 32卷1期, pp. 84-88

一個無理不等式的推廣

蔣明斌

文 [1]給出了如下二元不等式: 設 $x, y > 0$, 且 $x + y = 1$, 則

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\Big(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\Big) \leq \frac{4}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

文 [2]給出了 (1) 左邊的下界: 設 $x, y > 0$, 且 $x + y = 1$, 則

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\Big(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\Big) > 1+\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

文 [3]考慮了 (2) 的指數推廣, 得到: 設 $x, y > 0$, 且 $x + y = 1$, $k \in N$, $k > 0$, 則

$$(\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{y})\Big[\frac{1}{\sqrt[k]{1+x}}+\frac{1}{\sqrt[k]{1+y}}\Big] > 1+\frac{1}{\sqrt[k]{2}}, \tag{3}$$

$$(\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{y})\Big[\frac{1}{\sqrt[k]{1+(k-1)x}}+\frac{1}{\sqrt[k]{1+(k-1)y}}\Big] > 1+\frac{1}{\sqrt[k]{2}}. \tag{4}$$

文 [4]給出了 (1) 的類似: 設 $x, y, z > 0$, 且 $x + y + z = 1$, 則

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\Big(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\Big) \leq \frac{9}{2}, \tag{5}$$

並在文末提出了猜想: 設 $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, 則

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}. \tag{6}$$

文 [5]、[6]證明了猜想不等式 (6) 是成立的, 本文給出上述幾個不等式的推廣。

定理1: 設 $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $2 \leq n \in N$, 且滿足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, $2 \leq m \in N$,

(I) 若 $0 < \lambda \leq \dfrac{n}{n-1}$, 則

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{x_i}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[m]{1+\lambda x_i}} \leq \frac{n^2}{\sqrt[m]{n+\lambda}}. \tag{7}$$

(II) 若 $0<\lambda\le m$, 則

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{x_i}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[m]{1+\lambda x_i}}>n-1+\frac{1}{\sqrt[m]{1+\lambda}}. \tag{8}$$

證明: (I) 用數學歸納法證, 對 m 作歸納。(i) 當 $m=2$ 時, 由柯西不等式有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{x_3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\le\sqrt{\Big(\frac{1}{n}+x_2+x_3+\cdots+x_n\Big)\Big(x_1+\frac{n-1}{n}\Big)}\\
&=\sqrt{\Big(\frac{1}{n}+1-x_1\Big)\Big(x_1+\frac{n-1}{n}\Big)}=\sqrt{-x_1^2+\frac{2}{n}x_1+\frac{n^2-1}{n^2}}
\end{aligned}$$

即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\le\sqrt{n}\cdot\sqrt{-x_1^2+\frac{2}{n}x_1+\frac{n^2-1}{n^2}}$

令 $1+\lambda x_i=y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則 $x_i=\dfrac{y_i-1}{\lambda}$, $y_i>1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i=n+\lambda$, 且

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{1+\lambda x_i}}&\le\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{y_1}}\cdot\sqrt{-\Big(\frac{y_1-1}{\lambda}\Big)^2+\frac{2}{n}\cdot\frac{y_1-1}{\lambda}+\frac{n^2-1}{n^2}}\\
&=\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\cdot\sqrt{-y_1+\frac{2(n+\lambda)}{n}+\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{y_1}}
\end{aligned}$$

同理, 有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{1+\lambda x_2}}\le\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sqrt{-y_2+\frac{2(n+\lambda)}{n}+\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{y_2}},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{1+\lambda x_n}}\le\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sqrt{-y_n+\frac{2(n+\lambda)}{n}+\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{y_n}},$$

將這 n 個不等式相加, 並應用柯西不等式, 有

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_n}}\le\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2(n+\lambda)}{n}+\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{y_i}}$$

$$\leq \frac{\sqrt{n}}{\lambda}\cdot\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big[-y_i+\frac{2(n+\lambda)}{n}+\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{y_i}\Big]}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\cdot\sqrt{n}\sqrt{-\sum_{i=1}^{n}y_i+2(n+\lambda)+\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}}$$

$$=\frac{n}{\lambda}\cdot\sqrt{n+\lambda+\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}}$$

又由柯西不等式, 有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\geq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}=\frac{n^2}{n+\lambda}$, 由已知 $0<\lambda\leq\dfrac{n}{n-1}$, 知

$\dfrac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}=\dfrac{[(n-1)\lambda-n][(n+1)\lambda+n]}{n^2}\leq 0$, 所以,

$\displaystyle\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\leq\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n^2}\cdot\frac{n^2}{n+\lambda}=\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n+\lambda}$,

因此, $\displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_n}}\leq\frac{n}{\lambda}\cdot\sqrt{n+\lambda+\frac{(n^2-1)\lambda^2-2n\lambda-n^2}{n+\lambda}}=\frac{n}{\lambda}\cdot\frac{n\lambda}{\sqrt{n+\lambda}}$
$=\dfrac{n^2}{\sqrt{n+\lambda}}$, 即當 $m=2$ 時不等式 (7) 成立。

(ii) 假設 $m=k$ $(k\geq 2)$ 時不等式 (7) 成立, 即有

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k]{x_i}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}}\leq\frac{n^2}{\sqrt[k]{n+\lambda}}\tag{9}$$

下面證明當 $m=k+1$ 時不等式 (7) 也成立。

首先應用冪平均不等式: “ 設 $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則當 $\alpha>\beta$ 時,

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\tag{$*$}$$

且等號成立的充要條件爲 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ”, 有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\ (a_i>0,\ \alpha\geq 1),\ \text{即}\ \Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)^{\alpha}\leq n^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\ (a_i>0,\ \alpha\geq 1).\tag{10}$$

應用 (10) 可得

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k+1]{x_i}\Big)^{\frac{k+1}{k}} \le n^{\frac{k+1}{k}-1}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt[k+1]{x_i})^{\frac{k+1}{k}} = n^{\frac{1}{k}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k]{x_i}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt[k+1]{x_i} \le n^{\frac{1}{k+1}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k]{x_i}\Big)^{\frac{k}{k+1}} \tag{11}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k+1]{1+\lambda x_i}}\Big)^{\frac{k+1}{k}} \le n^{\frac{k+1}{k}-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt[k+1]{1+\lambda x_i}}\Big)^{\frac{k+1}{k}} = n^{\frac{1}{k}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k+1]{1+\lambda x_i}} \le n^{\frac{1}{k+1}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}}\Big)^{\frac{k}{k+1}}. \tag{12}$$

(11)、(12) 兩邊相乘並應用歸納假設 (9) 有

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k+1]{x_i}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k+1]{1+\lambda x_i}} &\le n^{\frac{2}{k+1}}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k]{x_i}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}}\Big]^{\frac{k}{k+1}}\\ &\le n^{\frac{2}{k+1}}\Big(\frac{n^2}{\sqrt[k]{n+\lambda}}\Big)^{\frac{k}{k+1}} = \frac{n^2}{\sqrt[k]{n+\lambda}},\end{aligned}$$

即 $m=k+1$ 時不等式 (7) 也成立。

由 (i)、(ii) 可知, 對 $m\ge 2$ $(m\in N)$ 不等式 (7) 成立。

(II) 不妨設 x_1 是 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 中最大的, 注意到 $0<x_i<1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[k]{x_i}}{\sqrt[k]{1+\lambda x_1}} > \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\sqrt[k]{1+\lambda x_1}} = \frac{1}{\sqrt[k]{1+\lambda x_1}} > \frac{1}{\sqrt[k]{1+\lambda}},$$

當 $i=2,3,\ldots,n$ 時, 注意到 $0<\lambda\le k$, 有

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[k]{x_i}}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}} &= \frac{\sqrt[k]{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[k]{x_i}\Big)^k}}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}} = \frac{\sqrt[k]{\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt[k]{x_i})^k + C_k^1(\sqrt[k]{x_1})^{k-1}\sqrt[k]{x_i}+\cdots}}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}}\\ &> \frac{\sqrt[k]{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i + k(\sqrt[k]{x_i})^{k-1}\sqrt[k]{x_i}}}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}} = \frac{\sqrt[k]{1+kx_i}}{\sqrt[k]{1+\lambda x_i}} \ge 1\end{aligned}$$

將這 n 個不等式相加即得 (8)。

考慮 (7) 的進一步推廣, 我們有

猜想: 設 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是正數, 且滿足 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_1 = 1$, $0<\alpha<1$, $0<\lambda\le\frac{n}{n-1}$, 則

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\lambda x_i)^{\alpha}}\le\frac{n^2}{(n+\lambda)^{\alpha}} \tag{13}$$

對於指數大於1的情形, 我們有

定理2: 設 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是正數, 且滿足 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_1 = 1$, $\alpha>1$, $\lambda>0$, 則

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\lambda x_i)^{\alpha}}\ge\frac{n^2}{(n+\lambda)^{\alpha}}. \tag{14}$$

證明: 因 $\alpha\ge1$, 由冪平均不等式$(*)$, 有 $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\ge\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\frac{1}{n}$, 所以 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\ge\frac{n}{n^{\alpha}}$, 應用權方和不等式: 設 $a_i, b_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則當 $\alpha>0$ 或 $\alpha<-1$ 時

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}}\ge\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\alpha+1}\Big/\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)^{\alpha} \tag{$**$}$$

且等號成立的充要條件爲 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\lambda x_i)^{\alpha}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1^{\alpha+1}}{(1+\lambda x_i)^{\alpha}}\ge\frac{n^{\alpha+1}}{\Big[\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)\Big]^{\alpha}}=\frac{n^{\alpha+1}}{(n+\lambda)^{\alpha}},$$

所以, $\displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\lambda x_i)^{\alpha}}\ge\frac{n}{n^{\alpha}}\cdot\frac{n^{\alpha+1}}{(n+\lambda)^{\alpha}}=\frac{n^2}{(n+\lambda)^{\alpha}}$, 即 (14) 成立。

參考文獻

1. 邢進喜, 數學問題1388[J], 數學通報, 2002(8)。
2. 宋慶, 龔浩生, 一個不等式的下界估計 [J], 中學數學月刊, 2003(2)。
3. 張升, 安振平, 一個無理不等式的再探索 [J], 中學數學教學參考, 2005(8)。
4. 吳善和, 石煥南, 一個無理不等式的簡證及類以 [J], 福建中學數學, 2004(2)。
5. 舒金根, 一個猜想不等式的證明 [J], 福建中學數學, 2004(8)。
6. 舒金根, 一個無理不等式的推廣及其它 [J], 中學教研, 2004(10)。

—本文作者任教於中國四川省蓬安縣蓬安中學—