數學傳播 32卷1期, pp. 66-76

圓周積分的三種看法

陳正宗 · 周克勳

摘要: 作者有幸在2006年暑假訪問中央研究院數學研究所, 看到數學傳播很多有趣的文章。相信對學子、工程師或數學教師均有正面意義。本人在海洋大學教授工程數學十餘年, 對於學生學習的成效一直相當注意。工程數學爲工學院與電資學院大學部同學必修的課程, 如何讓學生不畏懼與有效學習也一直是工程教育的重要課題。本文根據作者多年的工程數學教學經驗, 在接續上期數學傳播工程數學教學拾趣一文, 此次再列舉一個有趣的圓周積分問題, 分別以複變、偏微與勢論三個觀點來進行創意教學的思考。藉此範例提供學生與教師另一類的學習思考與教導方式。

關鍵字: 工程數學, 創意教學, 圓周積分, 複變, 偏微, 勢論。

1. 前言

近年來台灣高等教育在大學入學招生錄取率近達九成六後, 已進入一個完全不同的局面。政府當局一則以喜, 一則以憂。喜的是高等教育的普及對國家競爭力有所助益; 憂的是如何在資源有限的情況下維持大學教育的品質。身爲大學教師首當其衝, 因爲我們所面對學生的求知慾與好學心, 均已今不如昔。所謂草莓族之說, 即是反應此事。雖然教育部與國科會近幾年已在卓越教學與科學教育提供經費, 並有所謂補強教學, 然而學生的學習效果似乎未見提昇。因此, 在這種情況下, 如何在工程數學的教學上激發學生的興趣與潛力, 使得學習是一種樂趣而非應付考試的粗略想法, 是目前學校教師極大的挑戰。如何對學生群作出拔尖、汰後與提中間的教學效果, 是我們目前最重要的課題 [3]。本文將以圓周積分的計算爲例, 有別於傳統教科書是各自獨立的敍述方式, 根據作者多年教學與研究心得的累積予以串連綜整。或許是野人獻曝, 但至少可提供另一個思路來學習, 希望能對初學者學習與教師教學有所幫助。

對一個學過數學的學生而言, 可能學過複變, 偏微與勢論, 然對其間關係有所體會的並不多。讀者對複變、偏微與勢論若不是很熟悉, 建議可先行複習, 或許較有助瞭解本文的思緒脈絡。在此舉一個有趣的圓周積分問題, 來說明如何以複變、偏微與勢論的觀念來計算。並從中了解各類計算方法的相關性與對應的幾何及物理意義。將細談邊界路徑積分所含極點的留數與內外域

Laplace 問題的 Poisson 積分式及勢論中單雙層勢能的分離核函數積分, 以三個面向分別說明之。

考慮如下的圓周積分,

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,\ p \text{ 爲常數}$$

其中可將 $g(\theta)$ 表成 Fourier 級數如下:

$$g(\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos(m\theta)+b_m\sin(m\theta))$$

其中, a_m 與 b_m 是Fourier 係數。則圓周積分可拆成兩部份:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,\ m\in N \quad \text{或} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,\ m\in N$$

2. 簡式及通式示範說明

2.1. 簡式說明

今先以一簡例 $g(\theta)=1$ 說明, 分別以複變留數定理、偏微 Poisson 積分公式與單雙層勢論的分離核觀念來計算, 敘述如下:

方法一: 複變留數定理

求解 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta$, 其中, (1) $|p|<1$; (2) $|p|>1$, 可取複變積分路徑爲 $C:|z|=1$, 則 $z=e^{i\theta}$, $0<\theta\le 2\pi$, $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $d\theta=\frac{1}{iz}dz$, 參見圖一, 則圓周積分可轉換成複變路徑積分如下:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta = \oint \frac{1}{1-p(z+\frac{1}{z})+p^2}\frac{dz}{iz}$$

可整理得

$$\oint \frac{1}{z-pz^2-p+p^2z}\frac{dz}{i} = i\oint \frac{1}{pz^2-(1+p^2)z+p}dz$$

其中, 複數函數 $f(z)=\frac{1}{pz^2-(1+p^2)z+p}$, 則 $f(z)$ 在 $z=p$ 與 $z=\frac{1}{p}$ 各有一個一階極點, 參見圖一。

(1) 當 $|p|<1$ 時, 在單位圓內僅有 $z=p$ 的一個極點, 如圖一 (a) 所示

$$\text{Res}_{z=p}[f(z)] = \lim_{z\to p}\frac{(z-p)}{pz^2-(1+p^2)z+p} = \frac{1}{p^2-1} \quad \text{其中, Res 表留數。}$$

故

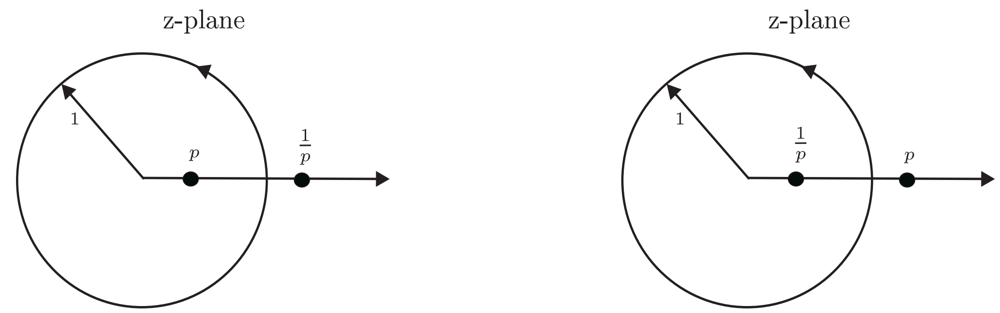
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta = i\oint \frac{1}{pz^2-(1+p^2)z+p}dz$$
$$= i2\pi i\frac{1}{p^2-1} = \frac{-2\pi}{p^2-1} = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

(2) 當 $|p|>1$ 時, 則只有 $z=\frac{1}{p}$ 在單位圓 C 內, 參見圖一 (b), 可得

$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{p}}[f(z)] = \lim_{z\to\frac{1}{p}} \frac{(z-\frac{1}{p})}{pz^2-(1+p^2)z+p} = \frac{1}{1-p^2}$$

故

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta = i\oint \frac{1}{pz^2-(1+p^2)z+p}dz$$
$$= i2\pi i\frac{1}{1-p^2} = \frac{2\pi}{p^2-1}$$



(a). $|p|<1$ (b). $|p|>1$

圖一. 複數路徑的積分 (a). $|p|<1$, (b). $|p|>1$

方法二: Poisson **積分公式**

由內外域 Poisson 積分公式可知

(1) $u(\rho,\phi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-\rho^2)g(\theta)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)}d\theta,\ |p|<1$
(內域 Laplace 問題場解表示式)

(2) $u(\rho,\phi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2-R^2)g(\theta)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)}d\theta,\ |p|>1$
(外域 Laplace 問題場解表示式) 註: 與內域差個負號

其中, $u(\rho,\phi)$ 可視爲滿足 Laplace 方程式 $\nabla^2 u = 0$ 與 Dirichlet 邊界條件 $u(R,\theta) = g(\theta)$ 的解。若選取 $(\rho,\phi) = (p,0)$, $(R,\theta) = (1,\theta)$, 可得

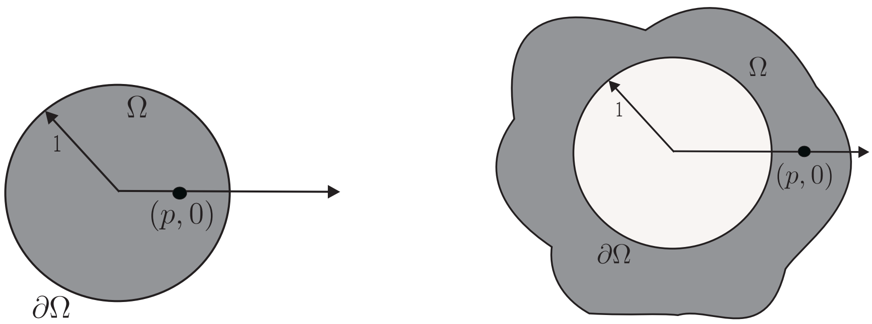
(1) 當 $|p| < 1$ 時, 當 $g(\theta) = 1$ 則 $u(p,0) = 1$。以圖二 (a) 內域 Laplace 問題的 Poisson 積分式可得

$$u(p,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-p^2}{1+p^2-2p\cos\theta} g(\theta)d\theta, \ \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

(2) 當 $|p| > 1$ 時, 當 $g(\theta) = 1$ 則 $u(p,0) = 1$, 以圖二 (b) 外域 Laplace 問題的 Poisson 積分式可得

$$u(p,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{p^2-1}{1+p^2-2p\cos\theta} g(\theta)d\theta, \ \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta = \frac{2\pi}{p^2-1},$$

所得結果與方法一是吻合的。



(a). 內域 Laplace 問題, $|p| < 1$　　(b). 外域 Laplace 問題, $|p| > 1$

圖二. 內外域 Laplace 問題 (a). $|p| < 1$, (b). $|p| > 1$。

方法三: 積分方程的勢能計算以分離核處理 [6]

勢論主要係由牛頓重力位能而來, 本文係探討二維勢論, 其基本解由 $1/r$ 轉成 $\ln r$, 其中 r 爲場點 x 與源點 s 的距離, $r = |x-s|$。讀者若不熟悉勢論, 可參考 Kellogg 經典之作。至於對偶積分方程描述勢論中的單雙層勢能及微分可參考陳與洪的邊界元素法一書, 有較基礎與詳細的介紹。定義場點 $x = (\rho,\phi)$, 源點 $s = (R,\theta)$, 則由勢能理論的基本解, 以單層勢能核函數 $\ln r = \ln|x-s|$ (核函數 U) 的基本解可展成分離核表示式如下 (詳細推導見附錄一):

$$U(s,x) = \ln\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)} = \begin{cases} \ln R - \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{\rho}{R}\right)^m \cos(\theta-\phi), R \geq \rho \\ \ln\rho - \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{R}{\rho}\right)^m \cos(\theta-\phi), \ \rho > R \end{cases}$$

而雙層勢能 (T)、單層勢能法向微分 (L)、雙層勢能法向微分 (M) 分別可寫成

$$T(s,x)=\frac{\partial U(s,x)}{\partial R}=\frac{R-\rho\cos(\theta-\phi)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)}=\begin{cases}\frac{1}{R}+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\rho^m}{R^{m+1}}\cos m(\theta-\phi), R\geq\rho\\ -\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{R^{m-1}}{\rho^m}\cos m(\theta-\phi),\quad \rho>R\end{cases}$$

$$L(s,x)=\frac{\partial U(s,x)}{\partial \rho}=\frac{\rho-R\cos(\theta-\phi)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)}=\begin{cases}-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\rho^{m-1}}{R^m}\cos m(\theta-\phi),\quad R\geq\rho\\ \frac{1}{\rho}+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{R^m}{\rho^{m+1}}\cos m(\theta-\phi), \rho>R\end{cases}$$

$$M(s,x)=\frac{\partial^2 U(s,x)}{\partial R\partial\rho}=\frac{\partial T(s,x)}{\partial\rho}=\frac{-2R\rho+(R^2+\rho^2)\cos(\theta-\phi)}{[R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)]^2}$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{m=1}^{\infty}m\frac{\rho^{m-1}}{R^{m+1}}\cos m(\theta-\phi), R\geq\rho\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}m\frac{R^{m-1}}{\rho^{m+1}}\cos m(\theta-\phi), \rho>R\end{cases}$$

其中, U、T、L 及 M 爲勢論中對偶邊界積分方程的四個核函數, 詳見 [15]。

將上述四個核函數中的 $x=(\rho,\phi)$ 定義成 $x=(p,0)$, $s=(R,\theta)$ 定義成 $s=(l,\theta)$, 而 $|p|<1$ 表示 $\rho<R$, $|p|>1$ 表示 $\rho>R$。

$$U(s,x)=\ln\sqrt{1+p^2-2p\cos\theta}=\begin{cases}\ln p-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p}\right)^m\cos m(\theta-\phi), |p|>1\\ -\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(p)^m\cos m(\theta-\phi),\qquad |p|<1\end{cases}$$

而雙層勢能 (T)、單層勢能法向微分 (L)、雙層勢能法向微分 (M) 分別可寫成

$$T(s,x)=\frac{\partial U(s,x)}{\partial R}=\frac{1-p\cos\theta}{p^2+1-2p\cos\theta}=\begin{cases}-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^m}\cos m\theta,\quad |p|>1\\ 1+\sum\limits_{m=1}^{\infty}p^m\cos m\theta, |p|<1\end{cases}$$

$$L(s,x)=\frac{\partial U(s,x)}{\partial \rho}=\frac{p-\cos\theta}{p^2+1-2p\cos\theta}=\begin{cases}\frac{1}{p}+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^{m+1}}\cos m\theta, |p|>1\\ -\sum\limits_{m=1}^{\infty}p^{m-1}\cos m\theta,\quad |p|<1\end{cases}$$

$$M(s,x)=\frac{\partial^2 U(s,x)}{\partial R\partial\rho}=\frac{\partial T(s,x)}{\partial\rho}=\frac{-2p+(1+p^2)\cos\theta}{(1+p^2-2p\cos\theta)^2}$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{m=1}^{\infty}m\frac{1}{p^{m+1}}\cos m\theta, |p|>1\\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}mp^{m-1}\cos m\theta, |p|<1\end{cases}$$

則 $pL(s,x)-T(s,x)$ 可得

$$\frac{1}{p^2+1-2p\cos\theta}=\begin{cases}\frac{1}{p^2-1}\left[1+2\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^m\cos m\theta\right], |p|>1\\ \frac{1}{1-p^2}\left[1-2\sum\limits_{m=1}^{\infty}p^m\cos m\theta\right], \quad |p|<1\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta=\begin{cases}\frac{1}{p^2-1}\left[\int_0^{2\pi}\left(1+2\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^m\cos m\theta\right)d\theta\right]=\frac{2\pi}{p^2-1}, |p|>1\\ \frac{1}{1-p^2}\left[\int_0^{2\pi}\left(1-2\sum\limits_{m=1}^{\infty}p^m\cos m\theta\right)d\theta\right]=\frac{2\pi}{1-p^2}, \quad |p|<1\end{cases}$$

將以上簡例 $g(\theta)=1$, 推廣成通式 $(g(\theta)=\cos(m\theta),\sin(m\theta))$ 說明如下:

2.2. 通式說明

方法一: 複變留數定理

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,\ \int_0^{2\pi}\frac{\sin(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,$$

其中, (1)$|p|<1$; (2)$|p|>1$, 可取複變積分路徑爲 $C:|z|=1$, 則 $z=e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$, $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $d\theta=\frac{1}{iz}dz$, 參見圖一, 則

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta &=\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta})^m}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta\right\}\\ &=\mathrm{Re}\left\{\oint\frac{z^m}{1-p(z+\frac{1}{z})+p^2}\frac{dz}{iz}\right\}\end{aligned}$$

其中, Re 表取實部, 上式可整理得

$$\mathrm{Re}\left\{\oint\frac{z^m}{z-pz^2-p+p^2z}\frac{dz}{i}\right\}=\mathrm{Re}\left\{i\oint\frac{z^m}{pz^2-(1+p^2)z+p}dz\right\}$$

其中, 複數函數 $f(z)=\frac{z^m}{pz^2-(1+p^2)z+p}$, 則 $f(z)$ 在 $z=p$ 與 $z=\frac{1}{p}$ 各有一個一階極點。
(1) 當 $|p|<1$ 時, 在單位圓內僅有 $z=p$ 的一個極點,, 如圖一 (a) 所示, 可得

$$\mathrm{Res}_{z=p}[f(z)]=\lim_{z\to p}\frac{(z-p)z^m}{pz^2-(1+p^2)z+p}=\frac{p^m}{p^2-1}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta &=\mathrm{Re}\left\{i\oint\frac{z^m}{pz^2-(1+p^2)z+p}dz\right\}\\ &=i2\pi i\frac{p^m}{p^2-1}=-\frac{2\pi p^m}{p^2-1}\end{aligned}$$

(2) 當 $|p|>1$ 時, 則只有 $z=\frac{1}{p}$ 在單位圓 C 內, 如圖一 (b) 所示, 可得

$$\mathrm{Res}_{z=\frac{1}{p}}[f(z)]=\lim_{z\to\frac{1}{p}}\frac{(z-\frac{1}{p})z^m}{pz^2-(1+p^2)z+p}=\frac{p^{-m}}{1-p^2}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta&=\mathrm{Re}\left\{i\oint\frac{z^m}{pz^2-(1+p^2)z+p}dz\right\}\\&=i2\pi i\frac{p^{-m}}{1-p^2}=-\frac{2\pi p^{-m}}{p^2-1}\end{aligned}$$

同理可得,
當 $|p|<1$ 時, $\int_0^{2\pi}\frac{\sin(m\theta)}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta=\mathrm{Im}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta})^m}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta\right\}=0$,
當 $|p|>1$ 時, $\int_0^{2\pi}\frac{\sin(m\theta)}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta=\mathrm{Im}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta})^m}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta\right\}=0$,
其中, Im 表取虛部。

方法二: Poisson 積分公式

同前, 若選取 $(\rho,\phi)=(p,0)$, $(R,\theta)=(1,\theta)$,

(1) 當 $|p|<1$ 時, 以圖二 (a) 內域 Laplace 問題的 Poisson 積分式可得

$$u(p,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-p^2}{1+p^2-2p\cos\theta}g(\theta)d\theta$$

其中, $g(\theta)=\cos(m\theta)$, 則 Laplace 偏微分方程 $u(\rho,\phi)$ 的解爲 $u(\rho,\phi)=\rho^m\cos(m\phi)$。因此 $u(p,0)=p^m$ 代入 Poisson 內域問題積分公式可得

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(m\theta)}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta=-\frac{2\pi p^m}{p^2-1}$$

(2) 當 $|p|>1$ 時, 以圖二 (b) 外域 Laplace 問題的 Poisson 積分式可得

$$u(p,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p^2-1}{1+p^2-2p\cos\theta}g(\theta)d\theta$$

其中, $g(\theta)=\cos(m\theta)$, 則 Laplace 偏微分方程 $u(\rho,\phi)$ 的解爲 $u(\rho,\phi)=\rho^{-m}\cos(m\phi)$。因此 $u(p,0)=p^{-m}$ 代入 Poisson 外域積分公式

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(m\theta)}{1+p^2-2p\cos\theta}d\theta=\frac{2\pi p^{-m}}{p^2-1},$$ 所得結果與前述方法是吻合的。

同理可得,

當 $|p| < 1$ 時, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(m\theta)}{1+p^2-2p\cos\theta} d\theta = 0$,

當 $|p| > 1$ 時, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(m\theta)}{1+p^2-2p\cos\theta} d\theta = 0$。

方法三: 積分方程的勢能計算以分離核處理 [6]

通式亦可透過單雙層分離核函數的一些操作算得, 於此便不再贅述。這些結果對於了解單雙層勢能及其微分場於橫越邊界之連續行爲的了解是有幫助的。對於現今流行的數值方法—對偶邊界元素法, 即是在這個基礎下由台大洪宏基教授與本文第一作者所展開出來的。

綜整以上結果, 吾人可得通式之解爲

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a_0 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}(a_m\cos(m\theta)+b_m\sin(m\theta))}{1-2p\cos\theta+p^2} d\theta$$

故

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2} d\theta = \begin{cases} a_0\left(\frac{2\pi}{1-p^2}\right) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m\left(\frac{2\pi p^m}{1-p^2}\right), \ |p|<1, \\ a_0\left(\frac{2\pi}{p^2-1}\right) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m\left(\frac{2\pi p^{-m}}{p^2-1}\right), |p|>1 \end{cases}$$

其中, b_m 無法貢獻進來, 係由於反對稱關係。故此, 爾後若遇到任何形式之 $g(\theta)$ 則可直接由此結果得知其解。

3. 結語

當學生時跟老師學數學, 後來當老師則教學生數學。做研究時, 利用數學的知識思考問題並尋找解決途徑。此文希望能讓學生體驗一個簡單的圓周積分式, 竟可以用三種不同的觀點予以瞭解, 開啓了旁徵博引與左右逢源之求學興趣, 這樣對大學畢業後進入研究所做研究、寫作論文及如何與指導教授溝通, 應有正面意義。因此, 啓發式的工數教學已是刻不容緩的當務之急。

本文舉一圓周積分例, 以三種不同的觀點 (1) 複變的留數定理 (2) 偏微的 Poisson 積分公式 (3) 積分方程的勢能理論配合分離核想法進行計算, 說明參見表一, 並加以闡述如何計算通式 $\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2} d\theta$ 之值, 包括閉合式與級數型, 並比較各類看法的實質內涵, 參見表二。並從中了解一個積分式, 嘗試以三種方式來了解其數學幾何與物理及力學內涵。並提供學生另一思路, 提高學生學習的興趣。學問不是零星丁豆, 而是一套的; 一個全面性的看法, 受用不盡。從前項羽棄劍習兵法, 關鍵在於一人敵終不敵萬人敵。本文綜合各類觀點, 充份反映工數的教法並非現代八股、一成不變。而是生動活潑, 其中一些奧妙有趣的關係, 仍待我們去發掘。所謂溫

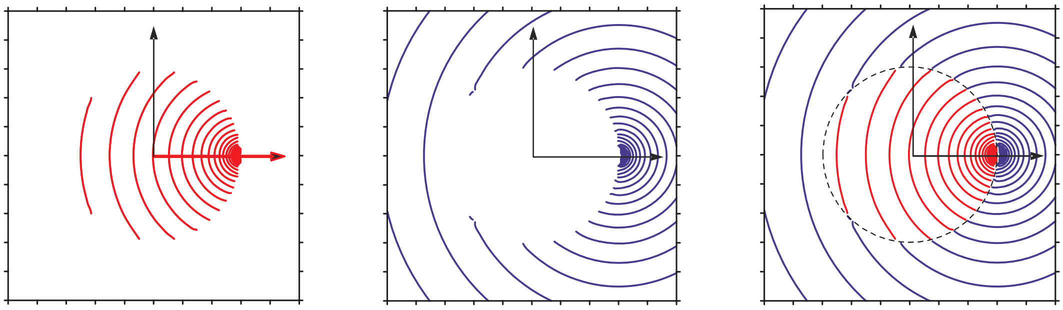
故能知新, 方能爲人師。唯有以啓發代替塡鴨, 才能教出一些對數學有興趣, 且將其運用自如的學生。我想這才是學習數學的目的 (有趣與有用)。本文一些更詳細資料可參閱網頁 [1]或講義 [2]。也歡迎對工程數學有興趣的師生予以賜教。

表一. 各類圓周積分計算結果綜整

	$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,\ m\in N$	$\int_0^{2\pi}\frac{\sin(m\theta)}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,\ m\in N$
$\|p\|<1$	$\frac{-2\pi p^m}{p^2-1}$	0
$\|p\|>1$	$\frac{2\pi p^{-m}}{p^2-1}$	0

表二. 各類看法的綜整

	複變 (留數定理)	偏微 Poisson 積分公式	勢能理論分離核
$\|p\|<1,\ \|p\|>1$	所包含的極點不同	內域與外域 Laplace 問題	內外分離核
型式	閉合型 (closed form)	閉合型 (closed form)	級數型 (series form)
圖說	圖一	圖二	圖三



(a). $|p|<1,\ \rho<R$ (b). $|p|>1,\ \rho>R$ (c). 合成

圖三. 內外域分離核 $(U(s,x))$ (a). $|p|<1$, (b). $|p|>1$, (c). 合成

4. 誌謝

感謝國科會大學生研究專題 NSC-90-2815-C-022-005-E 與 NSC-88-2815-C-019-003-E 贊助。

附錄一

在複數平面上 $s=(s_1,s_2)$ 與 $x=(x_1,x_2)$, 可分別以極座標複數表示 $s=\mathrm{R}e^{i\theta}$ 及 $x=\rho e^{i\phi}$, 則

$$\ln s=\ln R+i\theta,\ \ln x=\ln\rho+i\phi,$$

將 $\ln(s-x)$ 寫成下式

$$\ln(s-x)=\ln(s(1-\frac{x}{s}))=\ln s+\ln(1-\frac{x}{s}) \tag{A1}$$

若 $R>\rho$, 即 $\left|\frac{x}{s}\right|<1$, 則 $\ln(1-\frac{x}{s})$ 可展成泰勒級數如下

$$\ln(1-\frac{x}{s})=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(\frac{x}{s})^m,\ \left|\frac{x}{s}\right|<1 \tag{A2}$$

將 (A2) 式代入 (A1) 式再取實部, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{\ln(s-x)\}&=\ln r=\ln\sqrt{(R\cos\theta-\rho\cos\theta)^2+(R\sin\theta-\rho\sin\theta)^2}\\&=\ln R-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(\frac{\rho}{R})\cos(m(\theta-\phi)),\ R>\rho\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{\ln(x-s)\}&=\ln r=\ln\sqrt{(\rho\cos\theta-R\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta-R\sin\theta)^2}\\&=\ln\rho-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(\frac{R}{\rho})\cos(m(\theta-\phi)),\ \rho>R\end{aligned}$$

結合上述所推導的結果, 可以得到核函數 $U(s,x)$ 的級數型式:

$$\begin{aligned}U(s,x)&=\ln r=\ln\sqrt{(R\cos\theta-\rho\cos\theta)^2+(R\sin\theta-\rho\sin\theta)^2}\\&=\begin{cases}U^i(s,x)=\ln R-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(\frac{\rho}{R})\cos(m(\theta-\phi)), R>\rho\\U^e(s,x)=\ln\rho-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(\frac{R}{\rho})\cos(m(\theta-\phi)), \rho>R\end{cases}\end{aligned}$$

得證之。

參考文獻

1. 海大河工工數 Website 課程相關 http://msvlab.hre.ntou.edu.tw/, 2007。
2. 陳正宗, 工程數學講義, 基隆, 2007。

3. 國立台灣海洋大學教學優良教師經驗分享, 海洋大學, 基隆, 2001。
4. 吳清森, 無網格法及邊界元素法於薄膜及板問題之退化尺度分析, 海洋大學河海工程研究所碩士論文, 基隆, 2004。
5. 林盛益, 邊界元素法於板自由振動之數學分析與數值研究, 海洋大學河海工程研究所碩士論文, 國科會第三屆碩士論文獎, 基隆, 2003。
6. Chen J. T. and Wu C. S., *Alternative derivations for the Poisson integral formula*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, **37**:2(2006), 165-185.
7. Greenberg M. D., Application of Green's functions in science and engineering, Prentice-Hall, New Jersey., 1971.
8. Kreyszig E., Advanced engineering mathematics, Wiley, New York, 1988.
9. O'Neil P. V., Advanced engineering mathematics, Thomson, Boston, 1995.
10. Riley K. F., Hobson M. P. and Bence S. J., Mathematical methods for physics and engineering, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
11. Sommerfeld A., Partial differential equations in physics, Academic Press, New York, 1949.
12. Thomson W., Maxwell in his treatise, Vol.I., Chap. XI, quotes a paper in the Cambridge and Dublin Math. Journ. of 1848.
13. 陳正宗, 工程數學教學經驗談, 工程力學與數學創意教學研討會, 台北, 2004。
14. 陳正宗, 工程數學教學拾趣, 數學傳播, Accepted, 2007。
15. 陳正宗與洪宏基, 邊界元素法, 新世界, 台北, 1992。
16. Brown J. W. and Churchill R. V., Complex variables and applications, Seventh Edition, McGraw-Hill, 2003.
17. Kellogg O. D., Foundations of Potential Theory, Dover, 1953.
18. Chen J. T. and Hong H. K., *Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series*, Applied Mechanics Reviews, **52**:1(1999), 17-33.
19. Hong H. K. and Chen J. T., *Derivations of integral equations of elasticity*, Journal of Engineering Mechanics, **114**:6(1986), 1028-1044.

—本文作者任教於海洋大學河海工程學系—