數學傳播　32卷1期, pp. 62-65

從一元二次方程求根公式談起(一)

靳衛軍

1、問題的提出

關於實係數一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

的求根公式傳統的推導方法是這樣的: (1) 式兩邊同除以 a 得:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \tag{2}$$

配方得:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \tag{3}$$

$\cdots\cdots$ 這樣做固然正確但卻違反常理而且也較麻煩, 同時在深層應用上也暴露了其不足。

1.1. 爲什麼 (1) 式兩邊要同除以 a, 把二次項係數化爲1呢? 我們在解方程或不等式時, 例如 $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+3=0$ 一般原則是把分數係數化爲整係數, 再如用公式法解一元二次方程 $2x^2+x-1=0$, 並非把二次項係數化爲1才代入求根公式的, 這樣做反而麻煩。公式推導過程和應用應該是一致的。

1.2. 由 (2) 式爲什麼要配方呢? 爲什麼和怎樣想到要採取這一步呢? 這在學習過程中是一非常重要的問題。

1.3. 當 $b^2-4ac\geq 0$ 時, (3) 式兩邊開方得:

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}. \tag{4}$$

由此得到的求根公式應爲:

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}, \tag{5}$$

而非我們的經典結果:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{6}$$

1.4. 學了一元二次方程求根公式, 人們都知道 (1) 式若有二根, 其可分解爲: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$。爲什麼分解結果是這樣呢? 沿襲傳統推導一元二次方程求根公式過程去說明不僅麻煩, 而且無法揭示說明問題的根源。由於搞不淸問題的來龍去脈就導致僅能停留在一種機械、生硬、表面的應用上, 本文例3就暴露了傳統方法之不足。

2、怎樣才能自然、合理、簡明地得到一元二次方程的求根公式呢?

我們會解形如 (I): $ax^2=b$、(II): $(ax+b)^2=c$ 兩種類型的方程。那麼怎樣求 $ax^2+bx+c=0$ 的根呢? 我們不妨先把問題具體化。

例1. 解方程 $x^2+4x-1=0$。

簡析: 怎麼解這個方程呢? 回到已知去! 我們會解 (I)(II) 型的一元二次方程。新的方程不好解是因爲方程中多了一次項。如果沒有一次項就很簡單了。方程如何變形就可消去一次項? 由此配方法的出現就順理成章, 解題過程略。

例2. 解方程 $2x^2+x-1=0$。

簡析: 如何配方消去一次項呢? 兩邊同除2和我們的常識相違背。我們知道 $2=(\sqrt{2})^2$。所以可由 $(\sqrt{2}x)^2+x-1=0$ 配方得: $(\sqrt{2}x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2=\dfrac{9}{8}$。這樣雖自然合情理, 但配方過程還需根式運算也略麻煩。我們把2化爲 $(\sqrt{2})^2$ 實質就是希望把整個二次項變爲一完全平方式。若兩邊同乘以2得: $(2x)^2+2x-2=0$ 這樣配方就更簡便了。

由以上探索過程, 我們便很自然地得出一元二次方程的求根公式。

$ax^2+bx+c=0$, 兩邊同乘以 a 得: $(ax)^2+abx+ac=0$, 配方得: $(ax+\dfrac{b}{2})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4}$。當 $b^2-4ac\geq 0$ 時, 兩邊開方得: $ax+\dfrac{b}{2}=\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$, 故 $x_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; 當 $b^2-4ac<0$ 時, 方程無實根。

當然爲配方更簡便, 我們亦可 $ax^2+bx+c=0$ 兩邊同乘以 $4a$, 這樣與上述推導相比又略有改進。

3、一元二次方程求根公式的反問題

給出一個實係數一元二次方程, 我們可以根據判別式判別其根的性質, 若求根可根據公式得。反過來, 我們知道一個一元二次方程的二根 x_1、x_2, 能否求出這一方程呢? 我們很易構造出一個滿足條件的一元二次方程: $(x-x_1)(x-x_2)=0$ 即 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$。但以 x_1、x_2 爲根的方程唯一嗎? 並不唯一。所有方程形式應爲: $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, 其中 a 爲

一元二次方程二次項的係數。由此一元二次多項式因式分解的問題及二次函數的兩點式便得到簡單說明。同理可說明二次函數的頂點式: $y = a(x-h)^2 + k$ 的來源。關於一元二次方程的思想還有一些簡單深刻的應用, 我們另文再談。

由於對問題看法截然的不同導致在應用上產生了實質區別, 請看下題。

例3. [2003年高考, 上海理15]設 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均爲非零實數, 不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分別爲集合 M 和 N, 那麼 "$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$" 是 "$M=N$" 的 ( )

A、充分非必要條件　　B、必要非充分條件

C、充要條件　　D、既非充分又非必要條件

學生拿到題感到茫然, 看了參考答案覺得氣餒, 反例是怎麼構造出來的? 也有學生曾試圖做函數草圖卻遇到了困難。學生緣何會有諸多感觸? 這與解一元二次不等式教學及對一元二次多項式因式分解的理解有著密切關係。教學時, 我們著重從函數圖像的角度得出了一元二次不等式的解法, 而忽視了其代數本質。我們先對例3作一剖析, 關於解不等式內容的新構建我們另文專述。

簡析: 若 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, 能否得到 $M=N$ 呢? 不妨設 $a_2=ka_1$, $b_2=kb_1$, $c_2=kc_1$。若 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 有二根 x_1、x_2, 則集合 M 爲 $a_1(x-x_1)(x-x_2)>0$ 的解集, 集合 N 爲 $ka_1(x-x_1)(x-x_2)>0$ 的解集。易知當 $k>0$ 時, $M=N$; 當 $k<0$ 時, $M\neq N$; 若 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 無實根, 同上面討論結果相同。所以當 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ 時 M、N 的關係無法確定。

當 $M=N$ 時。若 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 的二根爲 x_1、x_2, 則$a_1x^2+b_1x+c_1=a_1(x-x_1)(x-x_2)$, 因 $M=N$, 故 a_2 必須與 a_1 同號, 且有 $a_2x^2+b_2x+c_2=a_2(x-x_1)(x-x_2)$, 由此易得 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$; 若無實根, 則 ${b_1}^2-4a_1c_1<0$。當 $a_1>0$ 時 M 爲全體實數, 因 $M=N$, 故 a_2 必須與 a_1 同號且 ${b_2}^2-4a_2c_2<0$, 此時 $\frac{a_1}{a_2}$、$\frac{b_1}{b_2}$、$\frac{c_1}{c_2}$ 的關係無法確定; 當 $a_1<0$ 時結果相同。

4、教學斷想

我們多少人都是按傳統方法教一元二次方程求根公式的, 大家也就在不知覺中這樣學會了。我們不禁要問: 這樣眞的理解了數學的思想方法了嗎? 顯然這樣被動接受是經不起反問的。新的推導方法確有助於對過程的理解, 內心對數學的體驗與傳統方法有著本質的區別。僅從表面結果看兩種方法都是掌握了一個公式, 都能熟練應用公式, 兩種不同方法教出來的學生

成績上相差似也不大, 但學生內心體驗卻是迥然不同的, 而且在深層應用上會顯出質的差別。教育不僅要傳授知識, 更重要的是培養學生的理性探索精神。在某種程度上反思比發現更爲重要。

參考文獻

1. 靳衛軍, 極坐標系中求曲線交點方法的探討, 學習報 (高二版), 2000.5.29。
2. 靳衛軍, 王西茜, 求曲線方程方法的新誤區—同學生的對話及自我反思, [J]數學教育研究, 2006.6。

—本文作者任教於山西省長治市華北機電學校—

文教短波—演講

演講者：Luis Caffarelli 教授 (Rolf Schock Prize)
(University of Texas at Austin, National Academy of Sciences)

演講題目：Two-Days Distinguished Lectures-
series lectures of nonlinear partial differential equations

4月30日 (星期三)
地點：台灣大學數學系新館308室

10:20∼11:10	Lecture 1:Random homogenization and discrete approximations
12:00∼14:00	Lunch and Discussion
14:10∼15:20	Lecture 2:A segregation model and its free boundary
15:30∼16:20	Tea Break

5月02日 (星期五)
地點：台灣大學數學系新館308室

10:20∼11:10	Lecture 3:Integral diffusions and the quasigeostrophic equation
12:00∼14:00	Lunch and Discussion
14:10∼15:20	Lecture 4:Optimal control for Levy process
15:30∼16:20	Tea Break