數學傳播 32卷1期, pp. 60-61

再說 $\sqrt{2}$ 為無理數

水木耳

在120期「舊題新解–根號 2 是無理數」我們看到了這一舊命題利用小數的一個新解法。我突然想到, 利用連分數也可以得一證法如下。

任給一實數 ξ_1, $0<\xi_1<1$。取 $\zeta_1=\dfrac{1}{\xi_1}$, 它可寫成整數部分 a_1 與小數部分 (如其不爲0) ξ_2 之和: $\zeta_1=a_1+\xi_2$, 即 $\xi_1=\dfrac{1}{a_1+\xi_2}$。今取 $\zeta_2=\dfrac{1}{\xi_2}$, ζ_2 也可寫成整數部分 a_2 與小數部分 (如其不爲0) ξ_3 之和: $\zeta_2=a_2+\xi_3$, 即 $\xi_2=\dfrac{1}{a_2+\xi_3}$。這樣的步驟只要小數部分 ξ_i 不爲0, 我們可以一直作下去, 如果碰到小數部分 ξ_i 爲0, 我們就停止。於是, 一般地,

$$\xi_1=\frac{1}{a_1+\xi_2}=\frac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\xi_3}}=\cdots=\frac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+\xi_{n+1}}}}}=\cdots$$

我們把上式簡寫成 $\xi_1=[a_1,a_2,\ldots,a_n;\xi_{n+1}]$, 稱爲連分數。如果 $\xi_{n+1}=0$, 便得到有限連分數 $\xi_1=[a_1,\ldots,a_n]$, 由於 a_i 共有 n 個, 我們說這個連分數的長度爲 n。不同的數, 其連分數表示也不同。反過來說, 連分數不同, 則其表示的數也不同。

我們將採用歸謬證法證明 $\sqrt{2}$ 爲無理數。設 $\sqrt{2}$ 爲有理數, $\sqrt{2}=\dfrac{p_0}{q_0}$, p_0, q_0 爲互質的正整數。

由於 $1<\sqrt{2}<2$, 所以 $0<\sqrt{2}-1<1$。把 $\sqrt{2}-1$ 寫成連分數: $\sqrt{2}-1=[n_1,n_2,\ldots]$。這個連分數一定是有限的: 因爲設 p_0 被 q_0 除, 得商1, 餘數 q_1 $(\neq 0)$: $p_0=q_0+q_1$, 即 $\dfrac{p_0}{q_0}=1+\dfrac{q_1}{q_0}$。所以, $\dfrac{p_0}{q_0}$ 的整數部分爲1, 小數部分爲 $\dfrac{q_1}{q_0}$, 而 $\sqrt{2}-1=\dfrac{q_1}{q_0}$。現在我們要求 $\dfrac{q_1}{q_0}$ 的連分數。設 $\xi_1=\dfrac{q_1}{q_0}$, 則其倒數 $\zeta_1=\dfrac{q_0}{q_1}$。現在 q_0 被 q_1 除, 得商 a_1, 餘數 q_2, 即 $q_0=a_1q_1+q_2$。故 $\dfrac{q_0}{q_1}=a_1+\dfrac{q_2}{q_1}$, 即 $\dfrac{q_0}{q_1}$ 的整數部分爲 a_1, 小數部分爲 $\dfrac{q_2}{q_1}$, 而 $\xi_1=\dfrac{1}{a_1+\dfrac{q_2}{q_1}}$,

這就是 $\xi_1 = \sqrt{2}-1$ 的連分數的頭一項表示。由於 $q_2 < q_1$, 如果 $q_2 \neq 0$, 我們可以令 $\xi_2 = \dfrac{q_2}{q_1}$, 仿照上一段求連分數的程序, 繼續作下去, 得

$$\xi_1 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \xi_{n+1}}}}},$$

其中 $\xi_{n+1} = \dfrac{q_{n+1}}{q_n}$, 而 $q_1 > q_2 > \cdots > q_n > q_{n+1}$。$q_i$ 的這一串數字它愈來愈小, 又都是餘數的形式 (所以 $q_{n+1} \geq 0$) , 那麼它不可能無窮地寫下去 (這個性質叫作費瑪的正整數無窮遞降性) , 所以我們知道 ξ_1 的連分數是有限的: $\xi_1 = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$。

現在

$$\sqrt{2} - 1 = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

即

$$\sqrt{2} = 1 + [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

將 $\sqrt{2}$ 的這一表示法代入恆等式 $\sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ 的右式之中, 得

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + [a_1, a_2, \ldots, a_n]},$$

右邊這個式子也是一個連分數, 也就是 $[2, a_1, a_2, \ldots, a_n]$, 所以我們有 $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [2, a_1, a_2, \ldots, a_n]$。

最後我們根據連分數的唯一性, 從上述最後這個式子可導出一個矛盾, 因爲左邊的連分數的長度爲 n, 而右邊的連分數長度爲 $n+1$。

這個證法看不到什麼「實質」, 但歸謬法就是這麼一回事。

順便一提, rational number 跟 irrational number 爲什麼被譯成「有理數」與「無理數」的事情。大家都會覺得很迷惑吧! 原來日本大約十七、十八世紀接觸西方數學的時候, 他們就這麼作了翻譯, 後來中國人參照日本的譯名依樣採用, 因而造成大錯。其實 rational 這個字的字根是 ratio, 它是名詞, 也就是比例的意思。如何把這個名詞的字變化成形容詞呢? 一般的作法是直接在名詞的字尾加上"al", 但由於它的最後一個字母"o"是母音, 不能直接加"al" (因爲 a 也是母音) , 需要先加一個子音之後再加"al", 於是就變成先加上"n"之後再加上"al", 而演變成 ratio-n-al。其實 rational 這個字 (在這裡) 跟"有理"一點都扯不上關係呢!

當初的人搞錯了, 後來的人跟著錯下去, 眞是「一失足成千古恨」呀 ......

—本文作者爲退休之大學數學系教授—